

Pravděpodobnostní převzorkování signálů

Lubomír Nevařil

České vysoké učení technické v Praze, fakulta jaderná a fyzikálně
inženýrská

Školitel: Ing. Miroslav Kárný, DrSc.
Konzultant: Ing. Ludvík Tesař, PhD.
Katedra: KM
Zaměření: TS
Akademický rok: 2006/2007

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Přehled nejčastějších značek	4
2	Teorie převzorkování signálů	5
2.1	Lanczosův filtr	10
2.2	B-spline funkce	11
3	Pravděpodobnostní převzorkování	13
3.1	Příprava pojmů	13
3.2	Využití apriorní informace	18
3.3	Popis úlohy a navrženého způsobu převzorkování	20
4	Srovnání metod převzorkování	24
4.1	Převzorkování přímký	26
4.2	Převzorkování náhodně generované funkce	34
4.3	Převzorkování skutečného signálu	43
4.4	Program	48
5	Závěr	49

1 Úvod

V praktických úlohách se každodenně setkáváme s aplikacemi, které nějakým způsobem zpracovávají vstupní data a na základě jejich analýzy dávají předpovědi o určitém sledovaném jevu, anebo částečně předzpracovaná data jednoduše předávají jako vstup do další fáze zpracování. Může se jednat například o požadavek předpovědi dopravní situace na křižovatce na základě dat z indukčních detektorů, analýzy měnového vývoje a kurzovních změn, nebo předpověď počasí na základě měření vhodně zvolených veličin popisujících stav atmosféry.

Vstupní data, získaná vhodnou měřicí nebo záznamovou metodou, jsou ve většině případů funkcemi reálných proměnných (například čas nebo prostorové souřadnice). Uvažujeme-li počítačové zpracovávání vstupních dat, musíme data která jsou ze své podstaty spojitá napřed nějakým způsobem převést do podoby zpracovatelné na počítači. Tento proces převodu spojitého signálu je v každém analogově číslicovém systému provázen časovou diskretizací (vzorkováním), a amplitudovou diskretizací (kvantováním). Logickým požadavkem je neztratit při tomto procesu žádnou informaci obsaženou v původně spojitě vyjádřené. Tento požadavek při procesu diskretizace spojitých dat nelze v praxi nikdy splnit, protože můžeme zaznamenat pouze konečný počet údajů s konečnou přesností.

Proto se data zaznamenávají pouze ve vhodném konečném počtu bodů (okamžiků). V některých aplikacích se ovšem stává, že tyto body byly v průběhu měření a záznamu zvoleny nesprávně, anebo měření v dodatečně požadovaných bodech nebylo provedeno, případně je po technické stránce dokonce neuskutečnitelné. V takových případech (je-li navíc záznam vstupních dat již neopakovatelný) přichází na řadu převzorkování. Příkladem může být změna vzorkovací frekvence obrazového záznamu za účelem zlepšení kvality obrázku při jeho zvětšování (nevrátíme tím však zpět nic z již ztracené informace), nebo také převzorkování signálu za účelem řízení systému v reálném čase.

Převzorkování signálu je obecně složitá úloha, neboť v různých případech použití jsou na výsledky po převzorkování kladeny rozdílné požadavky. Proto existuje celá řada různých metod zabývajících se převzorkováním signálů, které se od sebe liší svými vlastnostmi (rychlost, přesnost předpovědi) právě v závislosti na požadavcích aplikace, pro které jsou určeny. Jednou z možných metod převzorkování signálu a jejím srovnáním s jinými existujícími metodami se zabývá tato práce.

Existují dva v zásadě odlišné přístupy k převzorkování signálu. V prvním případě zrekonstruujeme ze vzorků původní signál a ten pak znovu podle potřeby navzorkujeme. V druhém případě se snažíme získat jiné vzorky původního signálu pouze na základě znalostí chování signálu blízko bodů převzorkování. V první části práce je stručně popsáno několik základních a široce používaných metod pro převzorkování signálu využívajících první zmíněný přístup, o nichž je psáno podrobněji například v [3], [4].

Druhá část práce popisuje metodu pravděpodobnostního převzorkování. Nejprve zavádí některé potřebné pojmy a poté popisuje princip metody a její účel. Ačkoli existuje celá řada metod používaných pro převzorkování signálů, velká část z nich se nedá použít

k převzorkování v reálném čase za účelem řízení systému, anebo přitom nedosahují dobrých výsledků. Příkladem takových metod jsou přesné konvoluční metody, které však do řízení vnášejí nežádoucí dodatečné zpoždění. Navíc potřebují pro výpočet vzorku v konkrétním okamžiku i vzorky ze symetrického okolí tohoto okamžiku. Při převzorkování v reálném čase jsou tedy nekauzální. Můžeme je využít, pokud už známe celý průběh signálu. Metoda pravděpodobnostního převzorkování je rozšířením metody z [11] pro odhady v reálném čase.

Závěrečná část práce se zabývá praktickým srovnáním metody pravděpodobnostního převzorkování s klasickými metodami převzorkování. Na uměle vygenerovaných testovacích signálech je prováděno převzorkování. Srovnáním výsledků převzorkování a skutečných hodnot signálu jsou počítány chyby převzorkování. Chyby převzorkování jsou počítány pro širokou škálu různých podmínek (délky převzorkovacího intervalu, zašumění signálu, apod.). Dále je provedeno srovnání metody pravděpodobnostního převzorkování a klasických metod pro případ skutečného signálu pocházejícího z měření dopravních dat na křižovatkách.

1.1 Přehled nejčastějších značek

e ... Gaussovský bílý šum
 $E(z)$... Střední hodnota náhodné veličiny z
 $f(z)$... Hustota pravděpodobnosti veličiny z
 $f \propto g$... Hustota f je proporcionální k funkci g
 $\mathcal{F}(g)$... Fourierův obraz funkce g
 $g * s$... Konvoluce funkcí g a s
 ch_1 ... chyba metody s apriorní informací
 ch_2 ... chyba metody bez apriorní informace
 ch_3 ... chyba metody lineární extrapolace
 i, l, m, n ... Indexy
 I ... Převzorkovací interval
 j ... Imaginární jednotka
 $lvzi$... Minimální počet vzorků na převzorkovací interval
 $L^T DL$... Rozklad informační matice
 \mathbb{N} ... Množina přirozených čísel
 \mathbb{R} ... Množina reálných čísel
 p ... Nekonečné pole delta funkcí
 $\#P$... Počet prvků množiny P
 s ... Obecný signál
 t ... Časový index (diskrétní čas)
 vzi ... Počet vzorků na převzorkovací interval
 V ... Informační matice
 \mathbf{x}^T ... Řádkový vektor x
 \mathbf{x} ... Sloupcový vektor x
 y ... Výstup sledovaného systému
 \hat{z} ... Odhad náhodné veličiny z
 $z \sim N(E(z), \sigma^2)$... Náhodná veličina z má normální rozdělení
 \mathbb{Z} ... Množina celých čísel
 δ ... Dirakova delta funkce
 Δ_p ... Délka převzorkovacího intervalu
 Δ, Δ_{vz} ... Vzorkovací perioda, délka vzorkovacího intervalu
 θ ... Parametr pozorovaného systému
 π ... Ludolfovo číslo
 ρ ... Úroveň zašumění signálu
 σ^2 ... Rozptyl veličiny s normálním rozdělením
 τ ... Spojitý čas
 ϕ ... Stavový vektor modelu
 ψ ... Datový vektor modelu

2 Teorie převzorkování signálů

V této kapitole jsou stručně shrnuty základní poznatky důležité pro lepší pochopení principu některých klasických metod převzorkování signálů. Uvedené informace jsou čerpány z literatury [3], [4], [5] a [6]. Jsou zde popsány některé běžně používané metody převzorkování, jež dávají často (například ve zpracování obrazu) velmi dobré výsledky [4]. Jak vyplývá z popisu těchto metod v dalším textu, použití většiny z nich pro převzorkování signálu za účelem řízení v reálném čase (například řízení dopravy ve městech) není vhodné, neboť vnášejí do řízení velké dodatečné zpoždění, nebo jsou přímo nekauzální. Některé jednoduché klasické metody převzorkování, jako například lineární interpolace, lze pro účely řízení dopravy v reálném čase použít. Avšak lze sestavit metody převzorkování (například metoda pravděpodobnostního převzorkování popsaná v kapitole o pravděpodobnostním převzorkování), které dávají lepší výsledky.

Definice 1. (Signál)

Pod pojmem signál rozumíme libovolnou funkci, která nese nějakou informaci (viz například [3]). Spojitým signálem budeme rozumět signál $s(\tau)$ vyjádřený jako funkce reálné proměnné τ . Tato funkce nemusí být nutně spojitá. Diskrétním signálem budeme rozumět funkci $s(\tau_t)$ jejíž definiční obor je konečná množina, případně konečnou posloupnost $s_t = s(\tau_t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 1.

V této práci se budeme zabývat převážně signálem závislým na čase, proto se také na proměnné τ nebo t budeme odvolávat jako na čas.

Definice 2. (Převzorkování)

Mějme neznámou reálnou funkci $s(\tau)$ jedné reálné proměnné definovanou na intervalu $W \subseteq \mathbb{R}$. Mějme k dispozici její funkční hodnoty pro časové okamžiky z konečné množiny $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\} \subset W$. Pod úlohou převzorkování budeme rozumět odhadnout pro libovolné $\tau \in W$ funkční hodnotu $s(\tau)$.

Poznámka 2.

Jak vyplývá z dalšího textu, někdy je dokonce možné nalézt skutečnou hodnotu signálu $s(\tau)$ (ve smyslu přiblížit se s libovolnou přesností). Avšak pouze za velmi přísných podmínek, které v praxi často nejsou splněny.

Definice 3. (Vzorkovací perioda)

Mějme signál $s(\tau)$ jehož hodnoty známe pro okamžiky z konečné množiny $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$. Pokud rozdíl $\Delta = \tau_i - \tau_{i-1}$ je konstantní pro všechna $i \in \{2, \dots, n\}$, nazveme tento rozdíl vzorkovací periodou signálu $s(\tau)$.

Poznámka 3. (Interpolace, extrapolace)

Úlohu převzorkování můžeme rozdělit na dvě kategorie. Mějme za úkol odhadnout hodnotu signálu v bodě $\tau \in \mathbb{R}$ na základě jeho hodnot v bodech $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n$. Pokud $\tau \notin \langle \tau_1, \tau_n \rangle$, nazveme úlohu extrapolací. V opačném případě ji nazveme interpolací.

Úloha extrapolace bývá složitější, neboť při interpolaci se můžeme opřít o teorii Fourierovy transformace a rekonstrukci diskrétních signálů. S úlohou extrapolace se setkáváme například u signálů závislých na čase, kdy při odhadování hodnoty signálu v čase τ nemůžeme mít k dispozici hodnoty signálu z intervalu (τ, ∞) .

Definice 4. (Konvoluce)

Nechť s, g jsou reálné funkce reálné proměnné. Nechť $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(\tau)| d\tau < +\infty$, a nechť také $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty$. Nechť dále pro funkci konv platí:

$$\text{konv}(\tau') = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)g(\tau' - \tau)d\tau. \quad (1)$$

Potom řekneme, že funkce konv vznikla konvolucí funkcí s a g , označíme $\text{konv} = s * g$.

Definice 5. (Fourierova transformace)

Nechť pro funkci s platí $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(\tau)| d\tau < +\infty$ (slabá Dirichletova podmínka).

Dále nechť

$$S(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)e^{-2\pi ju\tau} d\tau, \quad (2)$$

kde j je imaginární jednotka, π Ludolfovo číslo. Potom funkci $S(u)$ nazveme Fourierovým obrazem funkce $s(\tau)$, přechod od funkce s k funkci S nazveme Fourierovou transformací a značíme $S = \mathcal{F}(s)$

Poznámka 4. (Zpětná Fourierova transformace)

Z funkce $S(u)$ z definice Fourierovy transformace lze za určitých dodatečných předpokladů [5] zpětně získat funkci $s(\tau)$, a to jako

$$s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(u)e^{2\pi ju\tau} du. \quad (3)$$

Poznámka 5. (Diskrétní Fourierova transformace)

Obdobně jako v definici 5 můžeme zavést Fourierovu transformaci pro diskrétní signály. Mějme n vzorků signálu $s_t = s(\tau_t)$. Potom přímou a zpětnou diskrétní Fourierovu transformaci zavedeme pomocí vztahů

$$\begin{aligned} S(u) &= \sum_{t=0}^{n-1} s(\tau_t)e^{-2\pi jut/n}, \quad u \in \mathbb{Z}, \\ s(\tau_t) &= \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} S(u)e^{-2\pi jut/n}, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Tvrzení 1. (Konvoluční teorém)

Nechť jsou splněny předpoklady definice 4 a 5. Ať $S = \mathcal{F}(s)$, $G = \mathcal{F}(g)$ a nechť $\mathcal{F}(s * g)$ existuje. Potom pro funkce s a g platí:

$$\mathcal{F}(s * g) = S \cdot G. \quad (5)$$

Důkaz. Nejprve si podle definic rozepíšeme levou stranu rovnosti

$$\mathcal{F}(s * g)(u) = \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)g(v - \tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)g(v - \tau)d\tau\right) e^{-2\pi juv} dv. \quad (6)$$

Výraz $e^{-2\pi juv}$ nezávisí na τ , takže ho vtáhneme do vnitřního integrálu. Následně zaměníme pořadí integrace a protože $s(\tau)$ nezávisí na v , vytáhneme ho do vnějšího integrálu:

$$\mathcal{F}(s * g)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)g(v - \tau)e^{-2\pi juv} d\tau dv = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(v - \tau)e^{-2\pi juv} dv\right) d\tau. \quad (7)$$

Teď už pouze provedeme substituci $v' = v - \tau$ a zpětně přeznačíme v' na v :

$$\mathcal{F}(s * g)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-2\pi ju(v+\tau)} dv\right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)e^{-2\pi ju\tau} \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-2\pi juv} dv d\tau. \quad (8)$$

Tento integrál můžeme přepsat na součin dvou integrálů a ve výsledku dostaneme

$$\mathcal{F}(s * g)(u) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)e^{-2\pi ju\tau} d\tau\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-2\pi juv} dv\right) = S \cdot G(u). \quad (9)$$

□

Poznámka 6.

Nechť jsou (podle [6]) v tvrzení 1 splněny dodatečné předpoklady. Potom konvoluční teorém lze zapsat také ve tvaru

$$\mathcal{F}(s \cdot g) = S * G. \quad (10)$$

Tvrzení 2. (Obraz pole δ funkcí)

Nechť $\delta(\tau)$ značí Dirakovu zobecněnou funkci, Δ reálné číslo. Mějme funkci $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - i\Delta), \quad \tau, \Delta \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Potom (viz [5], nebo [6] vztahy (2-57) a (2-59)) pro její Fourierův obraz platí

$$\mathcal{F}(p(\tau))(u) = P(u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(u - i\frac{1}{\Delta}). \quad (12)$$

Tedy obraz nekonečného pole δ funkcí je opět nekonečné pole δ funkcí. Funkce p i $\mathcal{F}(p)$ jsou periodické, ovšem s různou periodou.

Tvrzení 3. (Rekonstrukce spojitého signálu)

Mějme spojité signál $s(\tau)$. Nechť δ značí Dirakovu delta funkci. Nechť existuje $u_0 \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(\mathcal{F}(s))(u) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} - \langle -u_0, u_0 \rangle.$$

Neboli požadujeme, aby Fourierův obraz signálu byl mimo zvolený interval $\langle -u_0, u_0 \rangle$ nulový. Nechť je známo n hodnot signálu $s(\tau_t)$ a nechť pro jednoduchost

$$\tau_t = \frac{(t-1)}{2} \quad t \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Vytvořme funkci $g(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, tak aby

$$\begin{aligned} g(\tau_t) &= s_t \cdot \delta(0) \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ g(\tau) &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{13}$$

Dále definujeme funkci sinc jako

$$\begin{aligned} \text{sinc}(\tau) &= \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ \text{sinc}(0) &= 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Potom spojité signál $s(\tau)$ spočteme jako

$$s(\tau) = \text{sinc}(\tau) * g(\tau). \tag{15}$$

Pokud by signál $s(\tau_t)$ měl jinou vzorkovací periodu, použili bychom funkci sinc s odpovídající periodou [3].

Tvrzení 4. (Obraz obdélníkového signálu)

Mějme signál $\text{obd}(\tau)$ definovaný jako

$$\begin{aligned} \text{obd}(\tau) &= 1 \quad \forall \tau \in \langle -\tau^*, \tau^* \rangle, \\ \text{obd}(\tau) &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{16}$$

Potom Fourierův obraz tohoto obdélníkového signálu bude funkce $\text{sinc}(\tau^* \cdot \tau)$.

Poznámka 7.

Tvrzení o rekonstrukci spojitého signálu si můžeme ukázat na následujícím příkladě. Mějme diskrétní signál $s(\tau_t)$, $\tau_t = 0,5 \cdot (t-1)$, $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, který vzniknul navzorkováním spojitého signálu $s(\tau)$. Proces navzorkování si můžeme představit jako vynásobení

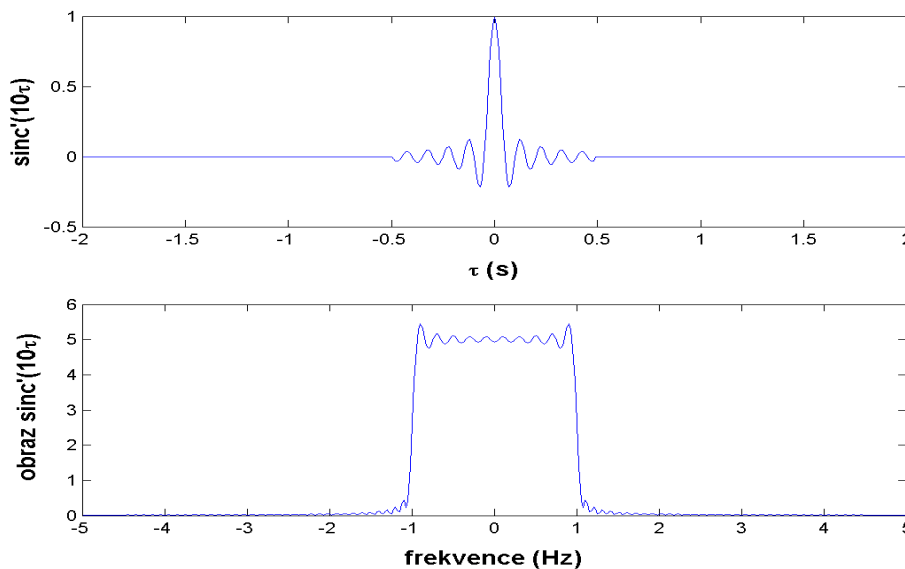
funkce $s(\tau)$ polem δ funkcí $p(\tau)$ ze vztahu (11). Vznikne tak funkce $g(\tau)$ definovaná vztahem (13). Pro Fourierův obraz $\mathcal{F}(g)$ tedy bude platit

$$\mathcal{F}(g(\tau)) = \mathcal{F}(s(\tau)) * \mathcal{F}(p(\tau)). \quad (17)$$

Z konvolučního teorému a vlastností Dirakovy δ funkce [6] potom vyplyne, že obraz $\mathcal{F}(g(\tau))$ je vlastně periodickým prodloužením obrazu $\mathcal{F}(s(\tau))$. Vynásobením této periodické funkce vhodnou [3] obdélníkovou funkcí dostaneme zpátky obraz původního spojitého signálu. To podle tvrzení 4 a poznámky 6 odpovídá konvoluci signálu $g(\tau)$ s funkcí sinc s vhodně [3] zvolenou periodou.

Poznámka 8.

V dalším textu budeme předpokládat, že rekonstrukci signálu lze provést pomocí funkce $\text{sinc}(\tau)$. Pokud bychom museli použít sinc s jinou periodou, změnily by se odpovídajícím způsobem [3] také uváděné vztahy.



Obrázek 1: Funkce sinc' a její Fourierův obraz; sinc' vznikla nahrazením hodnot funkce $\text{sinc}(10\tau)$ nulami mimo interval $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

Podle předchozího shrnutí je pro signály, které jsou frekvenčně omezené, ideálním způsobem rekonstrukce konvoluce s funkcí sinc s vhodně zvolenou periodou. Úskalí takového způsobu převzorkování jsou zřejmá již na první pohled. Především funkce $\text{sinc}(\tau)$ má nekonečný definiční obor, tudíž spočítat takovou konvoluci není možné.

Logickým dalším krokem je nebrat v úvahu celou funkci $\text{sinc}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, ale omezit se na vhodný interval kolem nuly $\tau \in \langle -\tau^*, \tau^* \rangle$, $\tau^* \in \mathbb{R}$ a mimo tohoto intervalu považovat funkci za nulovou. Jak je však ukázáno například v [3], obraz takovéto funkce

se značně liší od ideálního obdélníkového tvaru i v případě, že interval $\langle -\tau^*, \tau^* \rangle$ na který se omezíme bude velký. Při převzorkování takováto metoda nedává příliš dobré výsledky a je navíc výpočetně náročná.

Přesto je na základě myšlenky rekonstrukce pomocí funkce sinc založena celá řada metod převzorkování. Tyto metody se snaží funkci $\text{sinc}(\tau)$ s omezeným definičním oborem nahradit jinou funkcí (tzv. konvolučním jádrem), jejíž obraz by se co nejvíce podobal ideálnímu obdélníkovému tvaru, ale jejíž konvoluce se signálem by byla výpočetně nenáročná. Jedním ze způsobů jak takovouto funkci vytvořit je součin původní funkce $\text{sinc}(\tau)$ a vhodně zvolené funkce, která se nazývá okno. Tím vznikne takzvané konvoluční jádro, které nahrazuje funkci $\text{sinc}(\tau)$ ze vztahu (15).

2.1 Lanczosův filtr

Tento způsob převzorkování je pojmenován po maďarském matematikovi a fyzikovi, Corneliu Lanczosovi a používá se velmi často při převzorkování obrazu. Svého rozšíření dosáhl zejména kvůli poměrně dobré kvalitě převzorkování a malému vzrůstu výpočetní složitosti ve srovnání s dříve používanými metodami. Pod názvem Lanczosův filtr se míní skupina konvolučních jader, patřících do skupiny okénkových sinc jader. Konvoluční jádro tohoto filtru vznikne vynásobením Lanczosova okna

$$\begin{aligned} \text{Lanczos}N(\tau) &= \frac{\sin(\pi\tau/N)}{\pi\tau/N}, & -N \leq \tau \leq N, \\ \text{Lanczos}N(\tau) &= 0 \text{ jinak} \end{aligned} \tag{18}$$

a funkce $\text{sinc}(\tau)$. Výsledný tvar filtru je tedy

$$\text{LanFilter}N(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau/N)}{\pi\tau/N} \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}. \tag{19}$$

Lanczosův filtr tedy není pouze jeden, jednotlivé filtry se od sebe liší právě šířkou zvoleného okna. V praxi jsou často volené hodnoty $N = 2$ nebo $N = 3$. Tento filtr je často používán při zvětšování digitálních obrázků jako kompromis mezi rychlostí a kvalitou.

Poznámka 9.

Mezi další často používaná okna patří například Hammingovo, Blackmannovo, Kaiserovo, nebo Gaussovské. Jejich výhody pro konkrétní případy použití jsou rozebrány v [3].

Poznámka 10.

Jelikož Lanczosův filtr zahrnuje výpočet konvoluce, vnáší do převzorkování v reálném čase zpoždění.

2.2 B-spline funkce

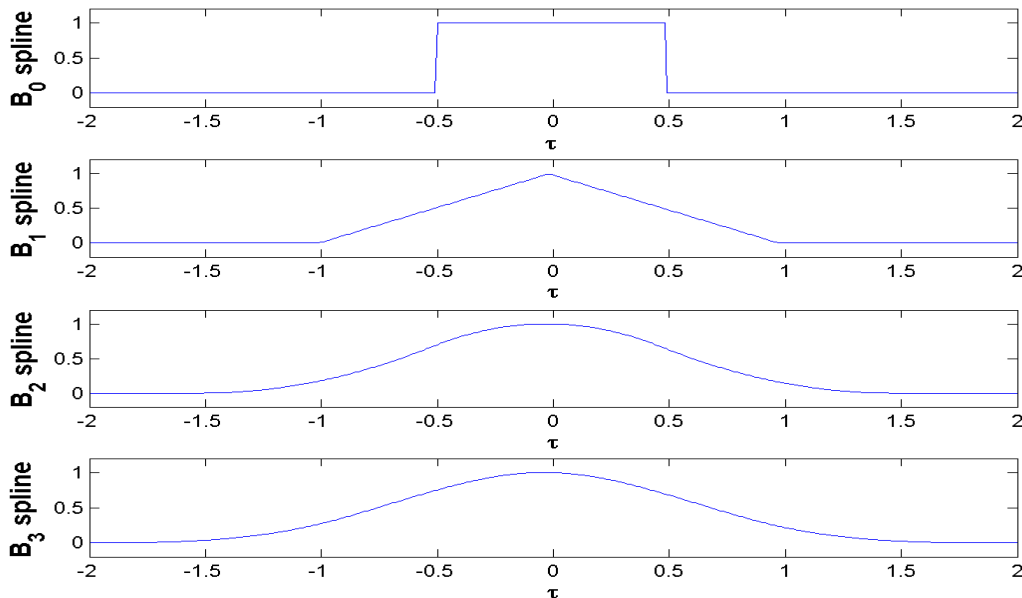
Definice 6. Mějme funkci $B_0(\tau)$ definovanou jako

$$\begin{aligned} B_0(\tau) &= 1 \quad \forall \tau \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ B_0(\tau) &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{20}$$

Funkci B_0 nazveme *B-spline nultého řádu*. Nechť dále platí

$$B_k(\tau) = B_0(\tau) * B_{k-1}(\tau) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Potom funkci B_k nazveme *B-spline k -tého řádu*.



Obrázek 2: Příklady B-spline

B-spline metody jsou metody navržené k přibližné rekonstrukci původního spojitého signálu, případně ke zvýšení vzorkovací frekvence. Jedná se v tomto smyslu o obdobu spline křivek, u kterých není kladen požadavek, aby procházeli všemi známými body navzorkovaného signálu. Tato jejich vlastnost je vidět přímo z konstrukce konvolučního jádra. Při výpočtu hodnoty signálu v daném okamžiku počítáme konvoluci signálu a konvolučního jádra v daném okamžiku. Aby výsledek konvoluce byl roven hodnotě signálu v tomto okamžiku, musela by v něm být hodnota konvolučního jádra rovna jedné. Zároveň by musela být hodnota konvolučního jádra pro všechny ostatní okamžiky rovna

nule. To u B-spline není splněno. B-spline však mají vlastnost, kterou obvykle jiná konvoluční jádra nemají, jsou nezáporná. Toho lze s výhodou využít pro signály, které nemohou ze své podstaty nabývat záporných hodnot (například vzdálenost, jas obrazu a jiné).

Poznámka 11.

Čím vyšší stupeň B-spline použijeme, tím lepší výsledek převzorkování můžeme očekávat. Z obrázku 2 však vidíme, že s rostoucím stupněm B-spline roste počet vzorků potřebných k výpočtu. Tím pádem roste i dodatečné zpoždění při převzorkování v reálném čase.

3 Pravděpodobnostní převzorkování

Klasické metody převzorkování signálů popsané v předchozí kapitole nacházejí uplatnění v široké škále úloh, zejména díky přesnosti podávaných výsledků [4], nebo nenáročné implementaci těchto metod. Při pokusech o řízení složitých systémů v reálném čase, pod které spadá například úloha efektivního řízení dopravy ve velkoměstech, se však tyto metody nedají dobře použít.

Ve zmíněné úloze řízení dopravy dostáváme informace o řízeném systému v nepravidelných časových intervalech v podobě, která není vhodná pro jeho další zpracování. Proto je nutné signál převzorkovat a odhadnout jeho hodnoty v okamžicích potřebných pro řízení, tedy v pravidelných časových odstupech vhodné zvolené délky. Protože řízení provádíme v reálném čase, nemůžeme použít metody převzorkování, které jsou nekauzální, případně vnášejí do řízení velké zpoždění. Tuto nežádoucí vlastnost má ovšem většina klasických metod převzorkování, jak vyplývá z jejich popisu uvedeného v předchozí kapitole. Některé zjednodušené varianty těchto klasických metod (například odhad pomocí B_1 spline odpovídá proložení dvou sousedních vzorků signálu přímkou) jsou sice kauzální a nevnašejí velké dodatečné zpoždění, avšak nedávají dobré výsledky, jak ukazují grafy (například obrázek 5 na str. 27) v kapitole zabývající se srovnáním převzorkovacích metod. Proto bylo nutné navrhnout novou metodu, která by měla všechny požadované vlastnosti (kauzalita, přesnost, nevnašející dodatečné zpoždění).

Před samotným popisem této nové metody jsou v přípravné části uvedeny potřebné pojmy a tvrzení podle literatury [1], [2], [8] a [9]. V celé kapitole jsou využívány poznatky z teorie pravděpodobnosti a statistiky, jejichž základy jsou dobře vysvětleny například v [1]. S pomocí těchto pojmů je potom v další části popsána metoda pravděpodobnostního převzorkování signálů.

3.1 Příprava pojmů

Definice 7. (*Hustota pravděpodobnosti*)

Nechť Z je reálná náhodná veličina (viz [1]). Definujme funkci $F(z)$, $z \in \mathbb{R}$ jako pravděpodobnost, že náhodná veličina Z nabyde hodnoty menší než z , tj. pravděpodobnost $Z \leq z$. Nechť tato funkce $F(z)$ je absolutně spojitá. Funkci $f(z)$, pro kterou platí

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(z') dz' \quad (22)$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny Z . Obdobně lze zavést hustotu pravděpodobnosti jako funkci více proměnných. Pokud nehrozí nejednoznačnost, budeme název náhodné veličiny i hodnoty kterých nabývá značit malými písmeny.

Poznámka 12.

Výraz $\int_{z_1}^{z_2} f(z') dz'$ tedy vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina Z nabývá hodnot z intervalu $\langle z_1, z_2 \rangle$.

Poznámka 13.

Různé hustoty pravděpodobnosti budeme rozlišovat podle proměnných, tj. $f(z)$ bude hustota náhodné veličiny Z , $f(z^*)$ bude hustota náhodné veličiny Z^* . Pokud by mohlo dojít k nejasnostem, bude použito jiné rozlišení, například pomocí indexů.

Definice 8. (Podmíněná hustota pravděpodobnosti)

Nechť $f(z)$, $f(\theta)$ jsou hustoty pravděpodobnosti náhodných veličin Z a Θ . Nechť $f(\theta) \neq 0$. Potom hustotu

$$f(z|\theta) = \frac{f(z)}{f(\theta)} \quad (23)$$

nazveme podmíněnou hustotou pravděpodobnosti veličiny Z (za předpokladu $\Theta = \theta$).

Tvrzení 5. (Bayesův vzorec)

Mějme hustotu pravděpodobnosti $f(z|\theta)$. Potom hustotu $f(\theta|z)$ lze spočítat jako

$$f(\theta|z) = \frac{f(z|\theta) \cdot f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z|\theta) \cdot f(\theta) d\theta}. \quad (24)$$

Poznámka 14. (Symbol \propto)

Nechť $f_1(z)$, $f_2(z)$ jsou hustoty pravděpodobnosti, nechť f' je libovolná funkce splňující požadavky na hustotu pravděpodobnosti kromě normovanosti [1], která nezávisí na z . Potom rovnost

$$f_1(z) = f' \cdot f_2(z) \quad (25)$$

můžeme zapsat také jako

$$f_1(z) \propto f_2(z). \quad (26)$$

Říkáme, že $f_1(z)$ je proporcionální k $f_2(z)$.

Poznámka 15. (Apriorní, posteriorní hustota)

Hustotu $f(\theta)$ z Bayesova vzorce nazveme apriorní hustotou veličiny Θ , hustotu $f(\theta|z)$ posteriorní hustotou.

Poznámka 16. (Sdružená, marginální hustota)

Nechť $f(z, \theta)$ je hustota pravděpodobnosti náhodných veličin Z a Θ . Hustotu

$$f(z) = \int f(z, \theta) d\theta \quad (27)$$

nazveme marginální hustotu pravděpodobnosti veličiny Z . Hustotu pravděpodobnosti $f(z, \theta)$ pak nazveme sdruženou.

Definice 9. (Systém)

Systémem budeme rozumět libovolnou část světa, se kterou budeme chtít nějak pracovat (popsat, ovlivnit). Vstupy budou veličiny, kterými systém ovládáme. Výstupy budou veličiny, které pozorujeme. Přesnější vymezení systému pak závisí na cíli, který sledujeme.

Poznámka 17. (Model)

K tomu, abychom mohli se systémem lépe pracovat (předpovídat jeho stav, kontrolovat ho) musíme zavést vhodný matematický popis. Tento popis musí být na jednu stranu dostatečně jednoduchý, abychom ho mohli formalizovat, na druhou stranu by měl co nejlépe vystihovat skutečné vlastnosti systému. Matematický popis systému nazveme model.

Definice 10. (ARX, AR a regresní model)

Mějme model systému kde předpokládáme, že výstupní hodnoty $y_t, y_{t-1}, \dots, y_0 \in \mathbb{R}$ závisí na vstupech $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ podle vztahu

$$\begin{pmatrix} y_t \\ \vdots \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_0^T \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}, \quad (28)$$

kde $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$ je parametr modelu, vektor $\mathbf{e}^T = (e_0, \dots, e_t)$ nekorelovaných veličin nazveme bílým šumem. Takovýto model nazveme lineární regresní model k -tého řádu. Mějme dále takový model, kde výstup y_t závisí pouze na hodnotách y_{t-1}, \dots, y_0 podle

$$y_t = \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \dots + \theta_k y_{t-k} + e_t, \quad t > k. \quad (29)$$

Potom tento model nazveme autoregresním modelem k -tého řádu. Konečně mějme model kde předpokládáme výstup y_t jako kombinaci předchozích výstupů a vstupů ve tvaru

$$y_t = b_1 x_{t,1} + \dots + b_m x_{t,m} + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_l y_{t-l} + e_t, \quad m, l > t. \quad (30)$$

Takovýto model nazveme ARX model řádu $l+m$ s parametrem $\boldsymbol{\theta}^T = (b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_l)$.

Poznámka 18.

Dále v textu budeme vždy uvažovat pouze Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou, tj. $e \sim N(0, \sigma^2)$.

Poznámka 19. (Nekauzální systém)

V předchozí definici lze uvažovat, aby výstup modelu y_t v čase t závisel také na vstupech (výstupech) s indexem $t+1$ a vyšším. Systém odpovídající tomuto modelu je nekauzální, ovšem v některých případech je takovýto model opodstatněný. Například pokud už je známa celá historie systému a výpočty provádíme dodatečně, tedy ne v reálném čase.

Definice 11. (Stavový vektor)

Mějme ARX model s parametrem $\boldsymbol{\theta}$ jehož výstup y_t je popsán vztahem (30). Potom vektor $\boldsymbol{\phi}_t$ definovaný jako

$$\boldsymbol{\phi}_t = \begin{pmatrix} x_{t,1} \\ \vdots \\ x_{t,m} \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-l} \end{pmatrix}, \quad m+l=k, \quad (31)$$

nazveme stavovým vektorem našeho ARX modelu řádu k v čase t .

Definice 12. (*Datový vektor*)

Předpokládejme stejný model a značení jako v definici 11. Potom vektor ψ_t definovaný jako

$$\psi_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \phi_t \end{pmatrix}, \quad (32)$$

nazveme datovým vektorem modelu v čase t .

Definice 13. (*Informační matice*)

Mějme stejný model a značení jako v definici 11 a 12. Označme X_0 matici

$$X_0 = \begin{pmatrix} \psi_{-n}^T \\ \vdots \\ \psi_{-1}^T \end{pmatrix}, \quad (33)$$

kde záporné indexy zdůrazňují, že se jedná o apriorní informace získané ještě před začátkem experimentu v čase $t = 0$. Předpokládejme dále, ať sloupce matice X_0 jsou lineárně nezávislé (tento předpoklad je vysvětlen dále v textu). Označme V_0 takzvanou apriorní informační matici definovanou jako

$$V_0 = X_0^T X_0. \quad (34)$$

Potom matici V_t definovanou jako

$$V_t = V_{t-1} + \psi_t \psi_t^T, \quad (35)$$

nazveme informační maticí modelu v čase t .

Poznámka 20. (*Rozklad informační matice*)

Při odvozování některých vlastností informační matice v dalším textu vynecháme pro zjednodušení časové indexy. K pozdější realizaci výpočtu (kvůli numerické stabilitě) je výhodné uvažovat matici V ve tvaru jejího rozkladu na součin

$$V = L^T D L,$$

kde L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále, D je diagonální matice. Jedná se vlastně o pozměněný LDR rozklad [9], pouze je vyměněno pořadí dolní a horní trojúhelníkové matice. Navíc protože V je symetrická, vzniknou horní a dolní trojúhelníková matice pouze vzájemnou transpozicí. O existenci jednoznačného rozkladu se zmiňuje tvrzení 9. Dále je výhodné uvažovat rozklady matic L a D ve tvaru

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d_L & \phi_L \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_D & 0 \\ 0 & \phi_D \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Tvrzení 6.

Mějme libovolnou matici X o hodnoti k . Potom hodnost součinu $X^T X$ je také rovna k .

Důkaz. (Podle [1])

Vezměme libovolný nenulový vektor \mathbf{z} . Jestliže $X\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (tj. X má lineárně závislé sloupce) potom také platí $X^T X\mathbf{z} = X^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Naopak, pokud $X^T X\mathbf{z} = \mathbf{0}$, potom také $\mathbf{z}^T X^T X\mathbf{z} = \mathbf{0}$ čili $(X\mathbf{z})^T (X\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, takže musí $X\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Tedy počet lineárně nezávislých vektorů, které obě matice zobrazí na nulový vektor je stejný. Tento počet odpovídá počtu lineárně závislých sloupců matice. Protože ale obě matice mají stejný počet sloupců, mají také stejnou hodnotu. \square

Tvrzení 7. (*Hodnota apriorní informační matice*)
Matice V_0 má plnou hodnotu (je regulární).

Důkaz. Mějme matici X našeho modelu řádu k definovanou podle vztahu (33). Ukážeme, že hodnota apriorní informační matice je rovna $k + 1$.

Předpokládáme, že $k < n$, kde n má stejný význam jako v definici 13, čili počet pozorovaných datových vektorů. Pokud by tomu tak nebylo, měli bychom pro soustavu n rovnic (30) (pro $t = -1, \dots, -n$) více rovnic než neznámých a řešení bychom si mohli zvolit.

Dále předpokládejme, že hodnota matice X je rovna $k + 1$. Pokud by sloupce X byly lineárně závislé, znamenalo by to, že některá složka vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ je lineární kombinací ostatních a lze jí (tudiž i celý sloupec matice X) vypustit.

Nechť tedy $k < n$ a nechť hodnota matice X je rovna $k + 1$. Potom podle tvrzení 6 je hodnota informační matice $X^T X$ také $k + 1$. Jelikož matice X má $k + 1$ sloupců, je matice $X^T X$ čtvercová a má $k + 1$ sloupců, tedy plnou hodnotu. \square

Tvrzení 8.

Informační matice V_t v čase t je pozitivně definitní.

Důkaz. Nejprve ukážeme že V_0 je pozitivně definitní. Sledujme skalární součin V_0 a libovolného vektoru \mathbf{z} . Máme

$$(V_0 \mathbf{z}, \mathbf{z}) = (X^T X \mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}^T X^T X \mathbf{z} = (X \mathbf{z})^T (X \mathbf{z}).$$

Označíme vektor ($X \mathbf{z} = \mathbf{z}'$) a dostaneme

$$(V_0 \mathbf{z}, \mathbf{z}) = (\mathbf{z}', \mathbf{z}') \geq 0,$$

což je z definice skalárního součinu nezáporné číslo. Tedy matice V_0 je pozitivně semidefinitní. Zároveň je podle tvrzení 7 regulární, tudíž je pozitivně definitní. Podle definice 13 je

$$V_t = V_{t-1} + \boldsymbol{\psi}_t \boldsymbol{\psi}_t^T,$$

zároveň však stejným postupem jako v prvním kroku důkazu můžeme ukázat, že součin $\boldsymbol{\psi}_t \boldsymbol{\psi}_t^T$ je pozitivně semidefinitní. Takže pro V_t platí

$$(V_t \mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}^T V_0 \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \boldsymbol{\psi}_t \boldsymbol{\psi}_t^T \mathbf{z} + \dots + \mathbf{z}^T \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{z} \geq 0,$$

což je součet kladného a dále nezáporných čísel. Takže informační matice V_t je v každém čase t pozitivně definitní. \square

Tvrzení 9. (*Existence jednoznačného rozkladu V_t*)
 $L^T DL$ rozklad informační matice V_t existuje.

Důkaz. Pozitivně definitní matice je podle Sylvestrova kritéria zároveň silně regulární (tj. má všechny subdeterminanty různé od nuly). To je ovšem postačující podmínka pro jednoznačný LDR rozklad. \square

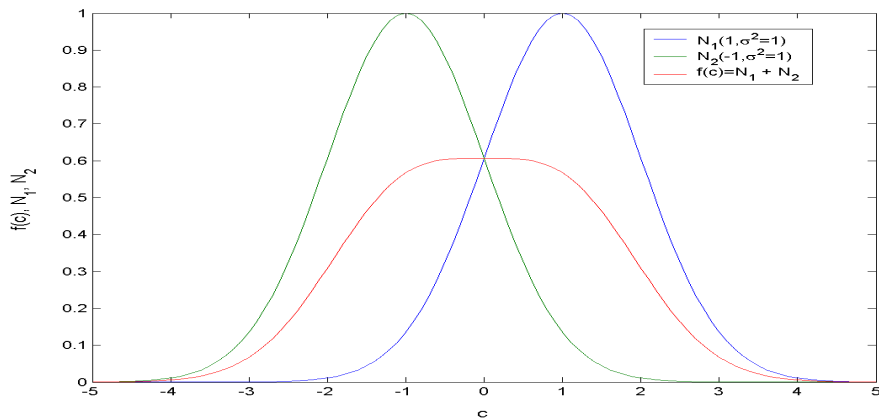
3.2 Využití apriorní informace

V této části je naznačena myšlenka o zpřesnění odhadu vlastností systému popsaná v [7], založená na následující úvaze. Mějme dva modely popisující stejný systém. Ať druhý model odhaduje hodnoty veličin, které pro své odhady využívá první model. Pokud odhady druhého modelu budou přesné, lze je použít jako vstup do prvního modelu a očekávat zlepšení odhadu prvního modelu. Při odhadech se často používá statistický přístup, proto odhady mají charakter hustot pravděpodobnosti, které se posléze vhodným způsobem redukuje na bodový odhad. Pro použití v prvním modelu je tedy možno použít odhad z druhého modelu dosazením konkrétního bodového odhadu. Tím se ovšem připravíme o část informace, kterou obsahovala celá hustota pravděpodobnosti.

Poznámka 21. (*Motivace*)

Tvrzení o možné ztrátě informace při redukcii hustoty pravděpodobnosti na bodový odhad a možné důsledky lze ukázat na následujícím příkladě. Mějme hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny C jakožto směs dvou normálních rozdělení, tj. například

$$f(c) \sim \frac{1}{2}N_1(1, \sigma^2) + \frac{1}{2}N_2(-1, \sigma^2). \quad (37)$$



Obrázek 3: Směs dvou normálních rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1$

Jako bodový odhad veličiny C bychom pravděpodobně zvolili střední hodnotu, tj. 0. Situace je znázorněna na obrázku 3. Předpokládejme, že tento bodový odhad použijeme

jako parametr dále do hustoty pravděpodobnosti veličiny Z , která bude mít tvar

$$f(z|c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-c)^2}{\sigma^2}}. \quad (38)$$

Potom po dosažení bodového odhadu za c do této podmíněné hustoty bychom dostali rozdělení se střední hodnotou rovnou nule. Pokud bychom se opět rozhodovali na základě střední hodnoty, bylo by tedy výsledkem naší metody odhad $z = 0$. Podle tvaru hustoty (38) intuitivně cítíme, že s výsledkem $z = 0$ souhlasíme jen pokud c^2 je velmi blízké nule. Podle obrázku 3 však vidíme, že pravděpodobnost c^2 blízkého nule je velmi malá, zatímco pravděpodobnost $c^2 > 0$ je přímo rovná jedné. Je tedy jisté $c^2 > 0$ a tedy $z > 0$. Podívejme se teď na příklad, kdy bychom místo bodového odhadu $c = 0$ použili celou hustotu pravděpodobnosti veličiny C podle (37). Potom bychom s využitím vztahu (38) vytvořili sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f(z, c)$ ve tvaru

$$f(z, c) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(z-c^2)^2}{\sigma^2}} \cdot (e^{-\frac{(z-1^2)^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{(z-(-1)^2)^2}{\sigma^2}}). \quad (39)$$

Integrací vztahu (39) přes všechny hodnoty parametru c nyní dostaneme rozdělení veličiny Z , které narozdíl od vztahu (38) zahrnuje naši veškerou minulou informaci o parametru c . Následně můžeme spočítat střední hodnotu tohoto nového rozdělení. Máme tedy

$$\begin{aligned} E(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f(z, c) dz dc = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{(z-c^2)^2}{\sigma^2}} \cdot (e^{-\frac{(z-1^2)^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{(z-(-1)^2)^2}{\sigma^2}}) dz dc, \\ &= \frac{1^2 + (-1)^2}{2} + 1. \end{aligned} \quad (40)$$

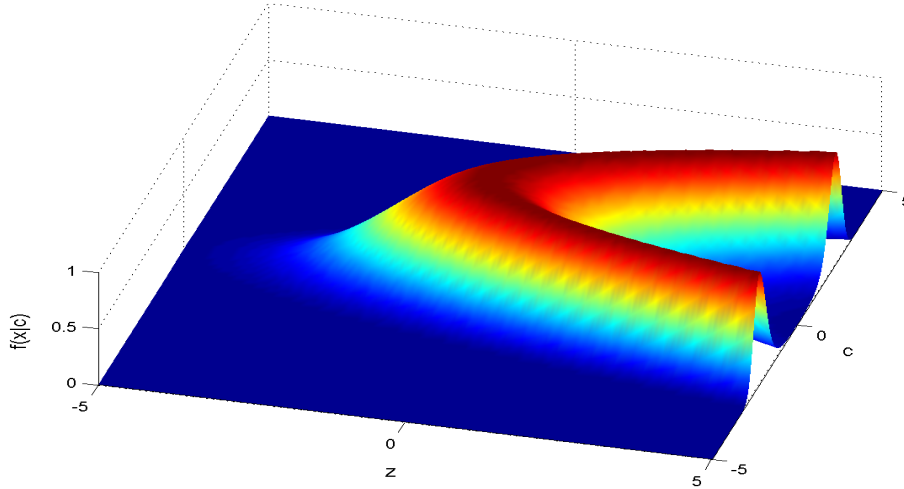
Hodnotu integrálu (40) jsme vzhledem k tvaru integrované funkce získali numerickým výpočtem. Hodnota $\frac{1}{2}(1^2 + 1^2) + 1 = 2$ se liší od původně vypočtené hodnoty $c = 0$ a je v souladu s naším intuitivním očekáváním. Tím, že jsme vzali do úvahy rozptyl parametru c jsme připustili kromě hodnoty $c = 0$ také okolí kladných i záporných hodnot c kolem nuly. Protože ale střední hodnota hustoty (38) závisí na druhé mocnině c , posunuli jsme díky integraci (40) (kterou zde můžeme přirovnat k váženému průměru Gaussových funkcí) celou marginální hustotu $f(z)$ doprava. Situace je vidět na obrázku 4.

Podívejme se nyní detailněji na možnost využití apriorní informace. Mějme systém, který budeme pozorovat. Snažíme se odhadnout jeho výstup y_t v čase t na základě vyhodnocování hustoty pravděpodobnosti

$$f_1(y_t | \phi_t, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2), \quad (41)$$

pozorovaných dat ϕ_t v čase t a subjektivně zvolené apriorní hustotě $f_1(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$ parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$. Mějme dále stejný systém, který však může být popsán jiným, neparametrickým modelem

$$f_2(y_t | \phi_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0). \quad (42)$$



Obrázek 4: Náhled hustoty pravděpodobnosti $f(z|c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-c)^2}{\sigma^2}}$

Pokud oba modely popisují stejnou náhodnou veličinu y_t , můžeme se pokusit využít odhadu druhého neparametrického modelu (42) ke zpřesnění odhadu prvního modelu (41). Nejjednodušším způsobem by bylo zredukovat hustotu pravděpodobnosti f_2 na bodový odhad y_t a tímto odhadem obohatit množinu pozorovaných dat ϕ_t v prvním modelu. Jak již ale bylo naznačeno v poznámce 21, takovýmto způsobem se můžeme připravit o část cenné informace obsažené v celé hustotě pravděpodobnosti f_2 .

Jeden z možných způsobů, kterým se o tuto informaci nepřipravíme, je popsán například v [7] nebo [8]. Jeho výsledkem je vztah (43) pro úpravu apriorní hustoty parametrů $f_1(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$ prvního modelu za pomoci hustoty $f_2(y_t|\phi_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0)$. Výsledkem (43) je nová hustota pravděpodobnosti $f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2|f_2)$ parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$, kterou nahradíme původní apriorní hustotu $f_1(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$. Na hustotu f_2 můžeme pohlížet jako na funkci dvou proměnných y_t a ϕ_t . Protože se ve vztahu (43) přes tyto dvě proměnné provádí integrace, jsou vynechány časové indexy:

$$f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2|f_2) \propto f_1(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) e^{\mu \int f_2(\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0) \ln(f_1(y|\phi, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2)) d\boldsymbol{\psi}}. \quad (43)$$

Číslo μ je vhodně zvolená váha, o způsobu jejího hledání se píše v [7].

3.3 Popis úlohy a navrženého způsobu převzorkování

Při snaze o řízení dopravy v reálném čase sledujeme, modelujeme a řídíme určitý systém. Signál tvořený výstupy y_t tohoto modelu však není v podobě vhodné pro řízení systému (tato skutečnost je dána fyzikální realizací našeho konkrétního sledovaného systému).

Připomeňme, že symbolem τ značíme spojitý čas měřený od zahájení pozorování našeho systému. Dále zde upozorníme, že symboly s indexem t (například τ_t, y_t) zde

mají význam jednak konkrétní veličiny v čase t a jednak konečné posloupnosti. Jejich rozlišení je vždy patrné z kontextu.

Máme k dispozici signál y_t , jehož hodnoty se dozvídáme průběžně v okamžicích τ_t , $t \in \mathbb{Z}$, v nepravidelných časových odstupech. Tedy $\tau_t - \tau_{t-1} \neq \text{konst.}$ Na základě těchto hodnot signálu $y(\tau_t)$ se budeme snažit odhadnout hodnoty signálu v jiných časových okamžicích $\tau_{t'}$ s pravidelnými odstupy, neboli $\tau_{t'} = 0 + \Delta_p \cdot t'$, $t' \in \mathbb{Z}$, $\Delta_p \in \mathbb{R}$ je délka převzorkovacího intervalu. Odhad hodnoty signálu $y(\tau_{t'})$ v čase $\tau_{t'}$ budeme provádět na základě vzorků signálu $y(\tau_t)$, kde budeme uvažovat pouze taková τ_t pro která platí $\tau_{t'-1} \leq \tau_t \leq \tau_{t'}$, tedy vzorky z tzv. aktuálního převzorkovacího intervalu. Odhadování hodnoty $y(\tau_{t'})$ provádíme v reálném čase, tedy hned v okamžiku $\tau_{t'}$. Aby měla úloha smysl, budeme předpokládat, že pravidelné časové intervaly pro převzorkování jsou zvoleny tak, aby každý obsahoval alespoň jednu známou hodnotu signálu $y(\tau_t)$. Označme ještě $\tau_{t-1} = \max\{\tau_t | \tau_{t'-1} \leq \tau_t \leq \tau_{t'}\}$ a $\tau_t = \tau_{t'}$.

Pro odhad hodnoty signálu $y_{t'} = y(\tau_{t'})$ byla na základě konzultací a článků [8] a [10] zvolena následující metoda převzorkování. Mějme převzorkovací interval $I = \langle \tau_{t'-1}, \tau_{t'} \rangle$. Označme symbolem τ' veličinu představující čas od začátku aktuálního převzorkovacího intervalu $I = \langle \tau_{t'-1}, \tau_{t'} \rangle$, neboli $\tau = \tau_{t'-1} + \tau'$. Pro daný převzorkovací interval I budeme modelovat průběh signálu $y(\tau)$ jako

$$y(\tau) = y(\tau_{t'-1} + \tau') = a \cdot \tau' + b + e, \quad e \sim N(0, \sigma^2). \quad (44)$$

Pro jednoduchost modelu tedy předpokládáme, že pro signál $y(\tau')$ v čase $\tau' \in I$ platí lineární závislost na τ' (až na odchylky způsobené šumem). Pro odhadovanou hodnotu signálu $y_{t'}$ v čase $\tau_{t'}$ tedy dostaneme

$$y_{t'} = y(\tau_{t'}) = a \cdot \Delta_p + b + e, \quad e \sim N(0, \sigma^2). \quad (45)$$

Pokud zapíšeme vztah (44) pomocí hustot pravděpodobnosti, dostaneme:

$$f(y(\tau') | \phi_t, \psi_{t-1}, \dots, \psi_0, a, b, \sigma^2) \sim N_{d_t}(\boldsymbol{\theta}^T \phi_t, \sigma^2), \quad (46)$$

kde $\boldsymbol{\theta}$, ϕ_t a ψ jsou ve smyslu zavedeného značení

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \phi_t = \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \phi_t \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Dále budeme v modelu předpokládat, že

$$f(y(\tau') | \phi_t, \psi_{t-1}, \dots, \psi_0, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) = f(y(\tau') | \phi_t, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2), \quad (48)$$

neboli hustota pravděpodobnosti odhadované hodnoty signálu $y_{t'}$ závisí na celé minulosti pozorovaných veličin pouze prostřednictvím parametrů ϕ_t , $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 .

Jako apriorní rozdělení parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$ zvolíme podle [2] takzvané Gauss inverzní Wishartovo rozdělení (GiW), takže hustota pravděpodobnosti parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$ se bude řídit vztahem

$$f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \sim GiW_{\boldsymbol{\theta}, \sigma^2}(L, D, \nu) = \frac{\sigma^{-(\nu + \#\phi + 2)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T (L^T D L) \tilde{\boldsymbol{\theta}}}}{I(L, D, \nu)}, \quad (49)$$

kde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ značí

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

hodnota ve jmenovateli

$$I(L, D, \nu) = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^d D^{-\frac{\nu}{2}} |\phi D| 2^{\frac{\nu}{2}} (2\pi)^{\frac{d\phi}{2}} \quad (51)$$

je normovací konstanta, ν je váha apriorní informace, $|\phi D|$ je determinant ${}^\phi D$ a Γ je Eulerův integrál

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^\infty \tau^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\tau} d\tau. \quad (52)$$

Po dosazení příslušných hodnot L_{t-1} , D_{t-1} , ν_{t-1} do (49) za L , D , ν , vypočítaných (viz [10]) na základě hodnot signálu y_t z aktuálního převzorkovacího intervalu I, dostaneme aposteriorní hustotu pravděpodobnosti parametrů $f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0)$. Vzhledem k tomu, že GiW rozdělení je konjugované k normálnímu [2], bude aposteriorní hustota pravděpodobnosti parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$ také GiW. Nyní můžeme vytvořit sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(y(\tau'), \boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0) = f(y(\tau') | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \cdot f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0). \quad (53)$$

Hustotu pravděpodobnosti hodnoty signálu $y(\tau')$ pak získáme integrací přes všechny přípustné hodnoty parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$:

$$f(y(\tau') | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0) = \int f(y(\tau'), \boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0) d\boldsymbol{\theta} d\sigma^2. \quad (54)$$

Pokud provedeme integraci, získáme podle [2] výslednou hustotu pravděpodobnosti ve tvaru

$$\begin{aligned} f(y(\tau') | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0) &= f(y(\tau') | \boldsymbol{\phi}_t, L_{t-1}, D_{t-1}, \nu_{t-1}) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu_{t-1}}{2}\right) [{}^d D_{t-1} (1 + \zeta_t)]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu_{t-1}}{2}\right) \left(1 + \frac{\hat{e}_t^2}{{}^d D_{t-1} (1 + \zeta_t)}\right)^{\frac{1}{2\nu_{t-1} + 2}}}, \end{aligned} \quad (55)$$

kde \hat{e}_t je odhad rozdílu skutečné a předpovídané hodnoty signálu $y(\tau') - \hat{y}(\tau')$,

$$\hat{e}_t = y(\tau') - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\phi}_t, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = {}^\phi L_{t-1}^{-1} {}^d L_{t-1}, \quad (56)$$

a pro ζ_t platí

$$\zeta_t = \boldsymbol{\phi}_t^T {}^\phi L_{t-1}^{-1} {}^\phi D_{t-1}^{-1} {}^\phi (L_{t-1}^T)^{-1} \boldsymbol{\phi}_t. \quad (57)$$

Střední hodnota hustoty pravděpodobnosti vyjádřené vztahem (55) je pak

$$\hat{y}(\tau') = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\phi}_t. \quad (58)$$

Za účelem převzorkování signálu, tj. odhadem hodnoty signálu $y_{t'}$ na konci aktuálního převzorkovacího intervalu I , stačí ve vztahu (55), případně (58) zvolit $\tau' = \Delta_p$. Dostaneme tak výsledný vztah pro odhad hodnoty signálu

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t'} = \hat{a} \cdot \Delta_p + \hat{b}. \quad (59)$$

Při odhadu hodnoty signálu v následujícím převzorkovacím intervalu $\langle \tau_{t'}, \tau_{t'+1} \rangle$ budeme postupovat obdobným způsobem jako pro interval $\langle \tau_{t'-1}, \tau_{t'} \rangle$, s rozdílem při konstrukci hustoty pravděpodobnosti parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$. Opět na základě hodnot signálu z aktuálního převzorkovacího intervalu spočítáme aposteriorní hustotu pravděpodobnosti $f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_{t+i}, \boldsymbol{\psi}_{t+i-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0)$ podle vztahu (49) dosazením L_{t+i-1} , D_{t+i-1} , ν_{t+i-1} . Symbol $+i$ v indexu značí, že se jedná o převzorkovací interval $\langle \tau_{t'}, \tau_{t'+1} \rangle$. Toto však nebude výsledná aposteriorní hustota. Hustotu $f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_{t+i}, \boldsymbol{\psi}_{t+i-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0)$ dále upravíme podle vztahu (43) následujícím způsobem.

Ve vztahu (43) dosadíme za $f_1(\boldsymbol{\theta})$ hustotu $f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_{t+i}, \boldsymbol{\psi}_{t+i-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0)$. Za hustotu f_2 ve vztahu (43) dosadíme hustotu $f(y(t') | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0)$ ze vztahu (55) získanou v předcházejícím převzorkovacím intervalu $\langle \tau_{t'-1}, \tau_{t'} \rangle$. U symbolů y a ϕ vynecháme časové indexy, neboť přes tyto veličiny se bude integrovat. Výslednou aposteriorní hustotu parametrů $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$, kterou označíme jako $f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | f_2)$ tedy získáme podle vztahu

$$f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | f_2) \propto f(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \boldsymbol{\phi}_{t+i}, \boldsymbol{\psi}_{t+i-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0) e^{\mu \int f(y | \phi, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0) \ln(f(y | \phi, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2)) dy d\phi}. \quad (60)$$

Přitom μ je vhodně zvolená váha, kterou přikládáme hustotě $f(y(t') | \boldsymbol{\phi}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\psi}_0)$ získané v předcházejícím převzorkovacím intervalu.

4 Srovnání metod převzorkování

V této části práce přistoupíme ke srovnání metody pravděpodobnostního převzorkování, popsané na konci předchozí kapitoly, s jinými metodami.

Popíšeme zde metodiku testování. Abychom mohli porovnávat přesnost odhadu jednotlivých metod, budeme tyto odhady srovnávat se skutečnými hodnotami signálu. V případě uměle vytvořeného signálu, kdy známe jeho analytický popis, můžeme jeho hodnotu v libovolném okamžiku vypočítat a srovnat s odhadnutou hodnotou v daném okamžiku odhadu. V případě, že průběh odhadovaného signálu neznáme, což je případ reálného signálu z dopravních detektorů, musíme postupovat jinak. Okamžiky, ve kterých odhadujeme hodnotu signálu musíme v takovém případě zvolit tak, aby se kryly s některými okamžiky, ve kterých známe hodnotu signálu. Tyto vzorky signálu nebudeme při výpočtech odhadů uvažovat. Použijeme je až ke srovnání odhadnuté hodnoty a skutečné hodnoty signálu.

Definice 14. (*Chyba metody*)

Chybou respektive odchylkou odhadu metody pro daný signál při daných podmínkách (tj. intenzitě šumu, délce převzorkovacího intervalu, počtu vzorků signálu v převzorkovacím intervalu) budeme rozumět veličinu

$$\text{chyba} = \frac{\sqrt{\sum_{i \in P} (y(t_i) - \hat{y}(t_i))^2}}{\frac{\#P \sum_{i \in P} |y(t_i)|}{\#P}} = \frac{\sqrt{\sum_{i \in P} (y(t_i) - \hat{y}(t_i))^2}}{\sum_{i \in P} |y(t_i)|}, \quad (61)$$

kde P značí množinu okamžiků, ve kterých jsme odhadovali hodnotu signálu a $\hat{y}(t_i)$ značí odhadnutou hodnotu. Jedná se v základě o kvadrát odchylky skutečné a odhadované hodnoty sčítaný přes všechny odhady pro daný signál za daných podmínek. Dále je brán ohled na celkový počet odhadů a střední hodnotu signálu (v absolutní hodnotě). Odmocnina v čitateli je použita proto, aby chyba byla bezrozměrná.

Poznámka 22.

Vzhledem k tomu, že byly testovány různé signály za různých podmínek, nebylo možno udržet počet odhadů pro každý výpočet chyby stejný. Testovací metoda byla proto upravena tak, aby každá chyba byla počítána minimálně ze 100 odhadů. Větší počet nebyl zvolen kvůli velké výpočetní náročnosti testovacího programu. V některých případech, pokud byla časová náročnost nižší, byl tento limit zvýšen (například při převzorkování přímky bylo pro výpočet každé chyby použito průměrně 400 odhadů).

Při testování v případě uměle generovaného signálu budeme dále postupovat následovně. Nejprve si zvolíme funkci, která bude reprezentovat náš neznámý spojitý skutečný signál. Nazvěme ji testovací funkcí. Poté na základě zvolené testovací funkce vygenerujeme vzorky diskrétního signálu. Budeme rozlišovat dva případy. V prvním případě budeme převzorkovávat pravidelně navzorkovaný signál, v druhém případě nepravidelně navzorkovaný signál.

V prvním případě vygenerujeme časové okamžiky s konstantními odstupy na časové ose. Tyto okamžiky rozdělí časovou osu na tzv. vzorkovací intervaly. Na základě zvolené testovací funkce spočítáme hodnotu signálu v těchto okamžicích. Dostaneme tedy pravidelně navzorkovaný signál. Dále zvolíme délku převzorkovacího intervalu jako vhodný celočíselný násobek délky vzorkovacího intervalu (minimálně dvojnásobek, neboť potřebujeme alespoň jeden vzorek na každý převzorkovací interval). Délku převzorkovacího intervalu budeme uvádět v počtu vzorků na převzorkovací interval. Dále zvolíme hodnotu parametru σ^2 a k vygenerovaným vzorkům signálu přičteme realizace Gaussovského bílého šumu, tj. náhodné veličiny $e \sim N(0, \sigma^2)$. Poté už spustíme metodu pro převzorkování signálu. Na základě odhadnutých a skutečných hodnot signálu spočítáme chybu metody. Následně celý postup opakujeme a počítáme chybu metody pro různé délky vzorkovacího intervalu, různé délky převzorkovacího intervalu a různou hodnotu rozptylu šumu σ^2 .

Ve druhém případě nejprve zvolíme délku převzorkovacího intervalu a na jejím základě vygenerujeme okamžiky pro převzorkování. Dále si zvolíme počet vzorků na převzorkovací interval a v každém převzorkovacím intervalu vygenerujeme odpovídající počet časových okamžiků s rovnoměrným rozdělením na tomto převzorkovacím intervalu. Následně pro získané časové okamžiky vypočítáme pomocí testovací funkce hodnoty signálu a přidáme Gaussovský bílý šum s rozptylem σ^2 . Spustíme metodu pro převzorkování a na základě odhadnutých a skutečných hodnot signálu vypočítáme chybu metody. Následně opět opakujeme celý postup pro různé délky převzorkovacího intervalu, různý počet vzorků na periodu a různé hodnoty rozptylu šumu σ^2 .

Provedeme srovnání tří metod. První metodou je navrhované pravděpodobnostní převzorkování, popsané na konci třetí kapitoly této práce. Odhad se počítá na základě hodnot signálu v aktuálním převzorkovacím intervalu a hustoty pravděpodobnosti (55) získané z předchozího převzorkovacího intervalu (kromě prvního intervalu, kde tuto hustotu nemáme k dispozici). Na tuto metodu se budeme dále odkazovat názvem metoda pravděpodobnostního převzorkování nebo také metoda s apriorní informací.

Druhá metoda odhaduje hodnotu signálu obdobným způsobem jako první metoda. Jediný rozdíl od první metody spočívá v tom, že hustota pravděpodobnosti parametrů modelu v aktuálním převzorkovacím intervalu se neupravuje vztahem (60). Metoda tedy nevyužívá informaci o hustotě pravděpodobnosti odhadu z předchozího převzorkovacího intervalu. Tuto metodu nazveme metoda bez apriorní informace. Metoda je podrobněji popsána v [11]. Na tuto metodu se budeme odkazovat jako na metodu bez apriorní informace.

Třetí metoda odhaduje hodnotu signálu v daném převzorkovacím intervalu pouze na základě dvou předchozích známých hodnot, prodloužením přímky určené těmito body. Jedná se tedy o lineární extrapolaci, neboli převzorkování pomocí B_1 spline. Tato metoda je jednoduchým představitelem klasických metod převzorkování. Zároveň slouží pro rychlé porovnání, zda odhad první metodou v sobě nese nějakou informaci o hodnotě signálu. Na tuto metodu se budeme odvolávat jako na lineární extrapolaci nebo také jako na metodu prodloužení přímky.

Poznámka 23. (Značení chyby metody)

Chybu metody pravděpodobnostního převzorkování budeme v grafech značit jako ch_1 , chybu metody bez apriorní informace jako ch_2 , chybu metody prodloužení přímkou jako ch_3 .

4.1 Převzorkování přímkou

Podle námi zvoleného modelu, definovaného vztahem (44), je nejvhodnější signál pro metodu pravděpodobnostního převzorkování signál ve tvaru přímky. Pro testování tedy zvolíme signál

$$y(\tau) = a \cdot \tau + b + e, \quad a = 1, b = 0. \quad (62)$$

Parametry $(a, b) = \boldsymbol{\theta}^T$ našeho modelu jsou v takovém případě v čase neměnné. Takže dokážeme už z malého počtu vzorků tyto parametry velmi přesně odhadnout. Navíc modelovaný průběh signálu přesně odpovídá skutečnému průběhu. Proto můžeme v tomto případě očekávat velmi přesné odhady. Odchytky odhadů od skutečné hodnoty signálu jsou způsobeny především přidaným šumem.

V případě přímky zvolíme převzorkování pravidelně navzorkovaného signálu. Pro testování zvolíme deset různých délek vzorkovacího intervalu

$$\Delta_{vz} \in \left\{ \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \dots, 2 \right\}.$$

Vynecháváme jednotky času, neboť v modelu (44) záleží pouze na velikosti převzorkovacího intervalu, nikoli jednotkách. Pro každou délku vzorkovacího intervalu dále počítáme chybu metody pro několik různých hodnot počtu vzorků v každém převzorkovacím intervalu (označené jako „vzi“)

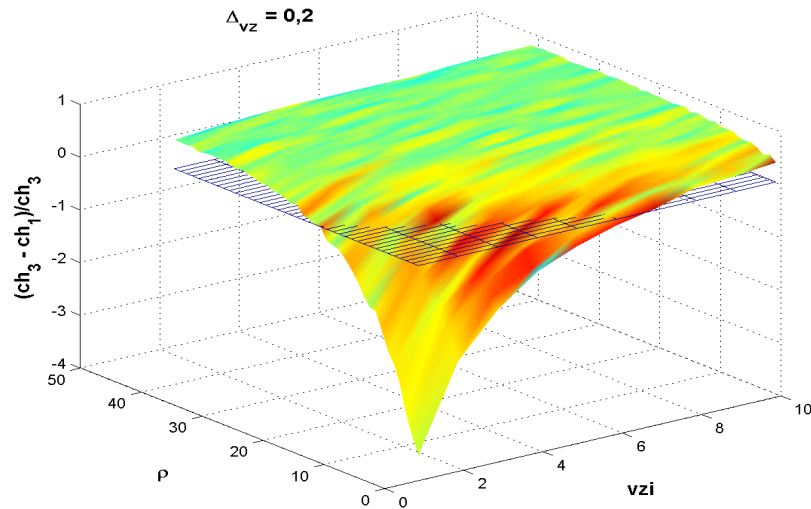
$$vzi \in \{1, \dots, 10\}.$$

Pro každou délku vzorkovacího intervalu a počet vzorků v každém převzorkovacím intervalu dále počítáme chybu odhadu metody pro 41 různých hodnot rozptylu šumu, tedy

$$\sigma^2 \in \left\{ \left(\frac{11}{10} \right)^{2\rho} \right\}, \quad \rho \in \{0, 1, \dots, 40\}.$$

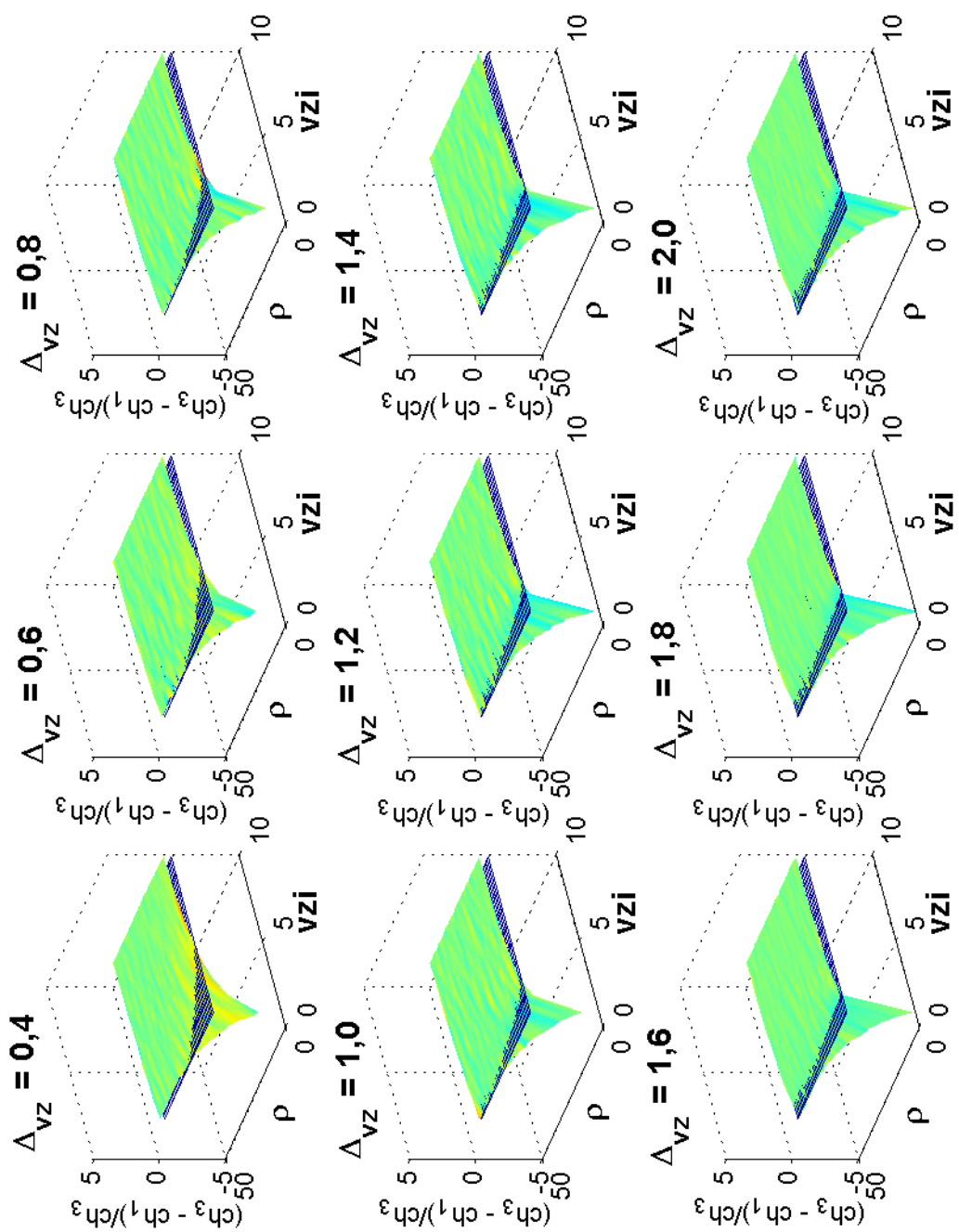
Nyní provedeme diskusi získaných výsledků. Jak můžeme vidět na obrázku 5, metoda pravděpodobnostního převzorkování dává téměř ve všech případech lepší výsledek než prosté prodloužení přímkou. Výjimka nastává pro případ malého počtu vzorků na převzorkovací interval a malé zašumění, kdy je prodloužení přímkou lepší nebo srovnatelné. Tato skutečnost nezávisí ani na délce vzorkovacího intervalu, jak je vidět na obrázku 6. Při malém šumu je prodloužení posledních dvou bodů přímkou velmi dobrým odhadem přímky (bez zašumění dokonce zcela přesným), zatímco pravděpodobnostní metoda potřebuje ke správnému odhadu parametrů určitý počet vzorků.

Podívejme se nyní na srovnání s metodou bez apriorní informace. Jak vidíme na obrázku 7, metoda bez apriorní informace dává stále přibližně stejný odhad. Ve skutečnosti lze pozorovat, že se odhad nepatrně mění, avšak toto je pouze důsledek způsobu výpočtu

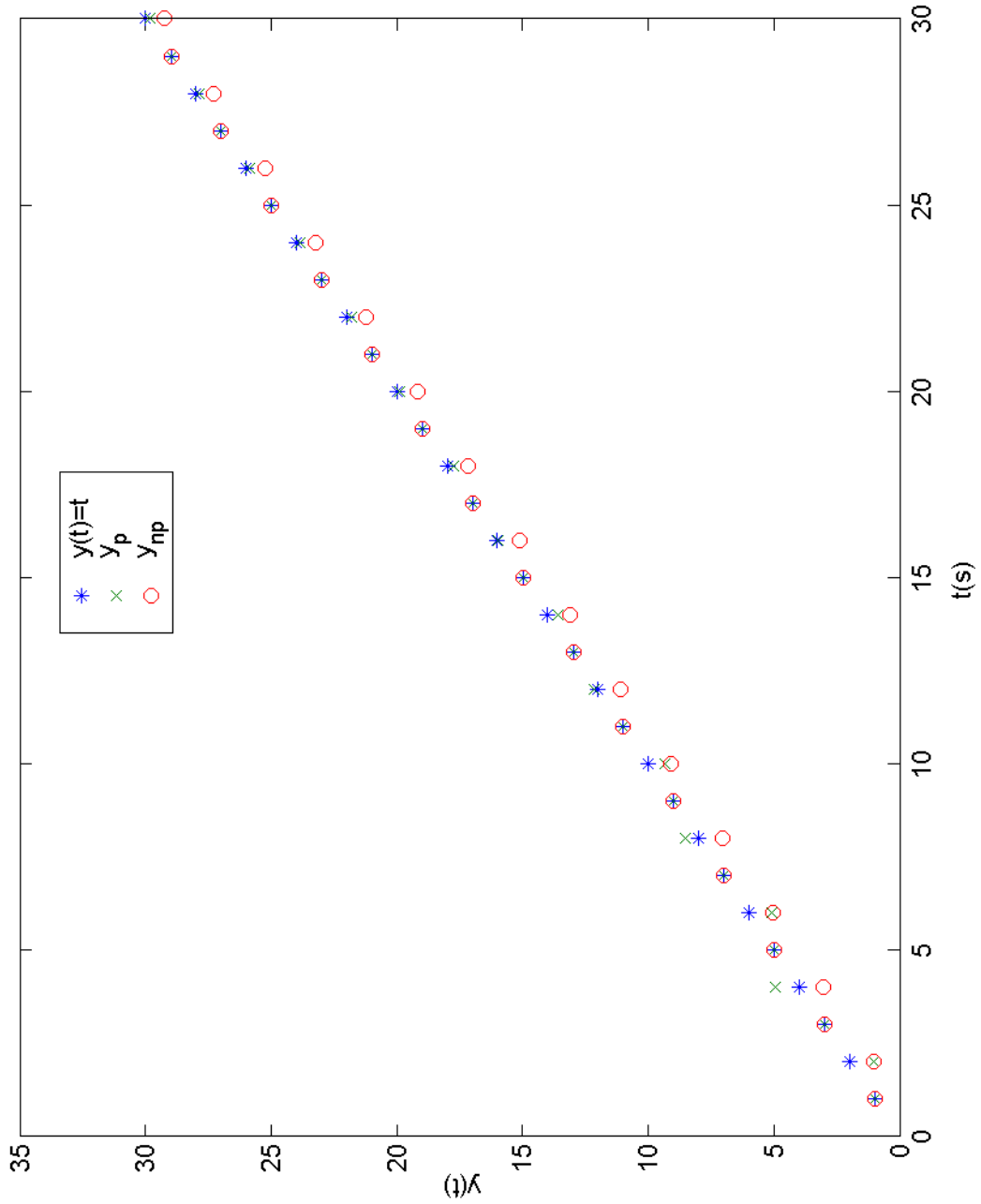


Obrázek 5: Srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a lineární extrapolací; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací

odhadu parametrů. Z jednoho bodu se nedají dobře odhadnout dva parametry přímky, pokud si vhodným způsobem neuchováme informace z minulosti. Výhoda takového uchování ve formě hustoty pravděpodobnosti odhadu z předchozího převzorkovacího intervalu, kterou využívá metoda pravděpodobnostního převzorkování je dobře vidět právě z obrázku 7. Lze na něm pozorovat postupné zlepšování odhadu metody pravděpodobnostního převzorkování, ačkoli je přímka pokaždé odhadována pouze na základě jednoho bodu. Kvalita tohoto zlepšení při tak malém počtu vzorků na převzorkovací interval je však podmíněna nízkým zašuměním signálu a neměnností parametrů systému v čase.



Obrázek 6: Srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a lineární extrapolací pro různé délky vzorkovacího intervalu Δ_{vz} ; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací

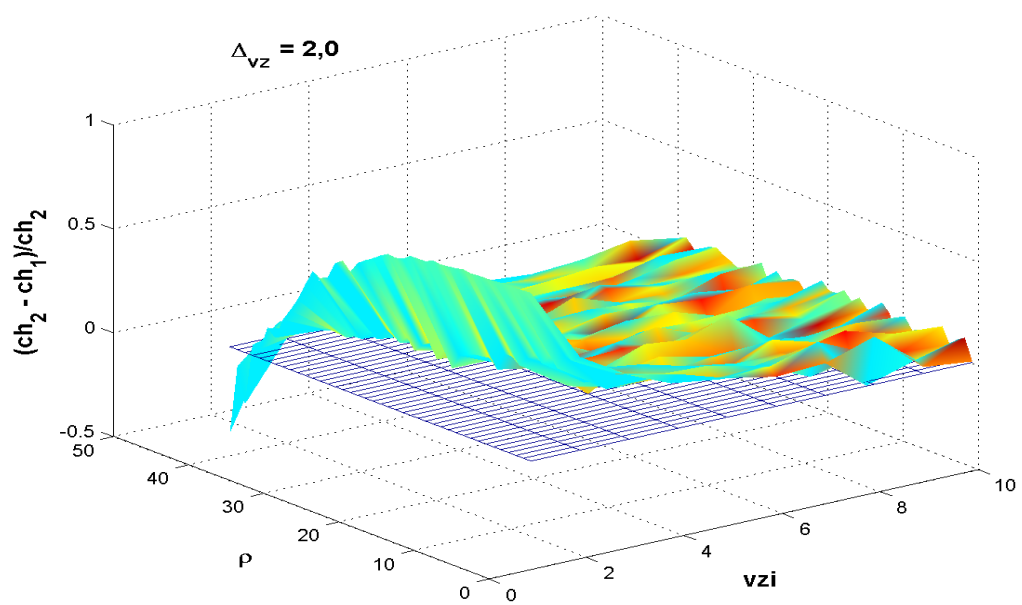


Obrázek 7: Odhady pravděpodobnostní metodou se mohou zlepšit i v případě, že odhadujeme přímku pouze na základě jednoho vzorku; $y(t)$ je původní signál, y_p odhad metodou s apriorní informací, y_{np} odhad metodou bez apriorní informace

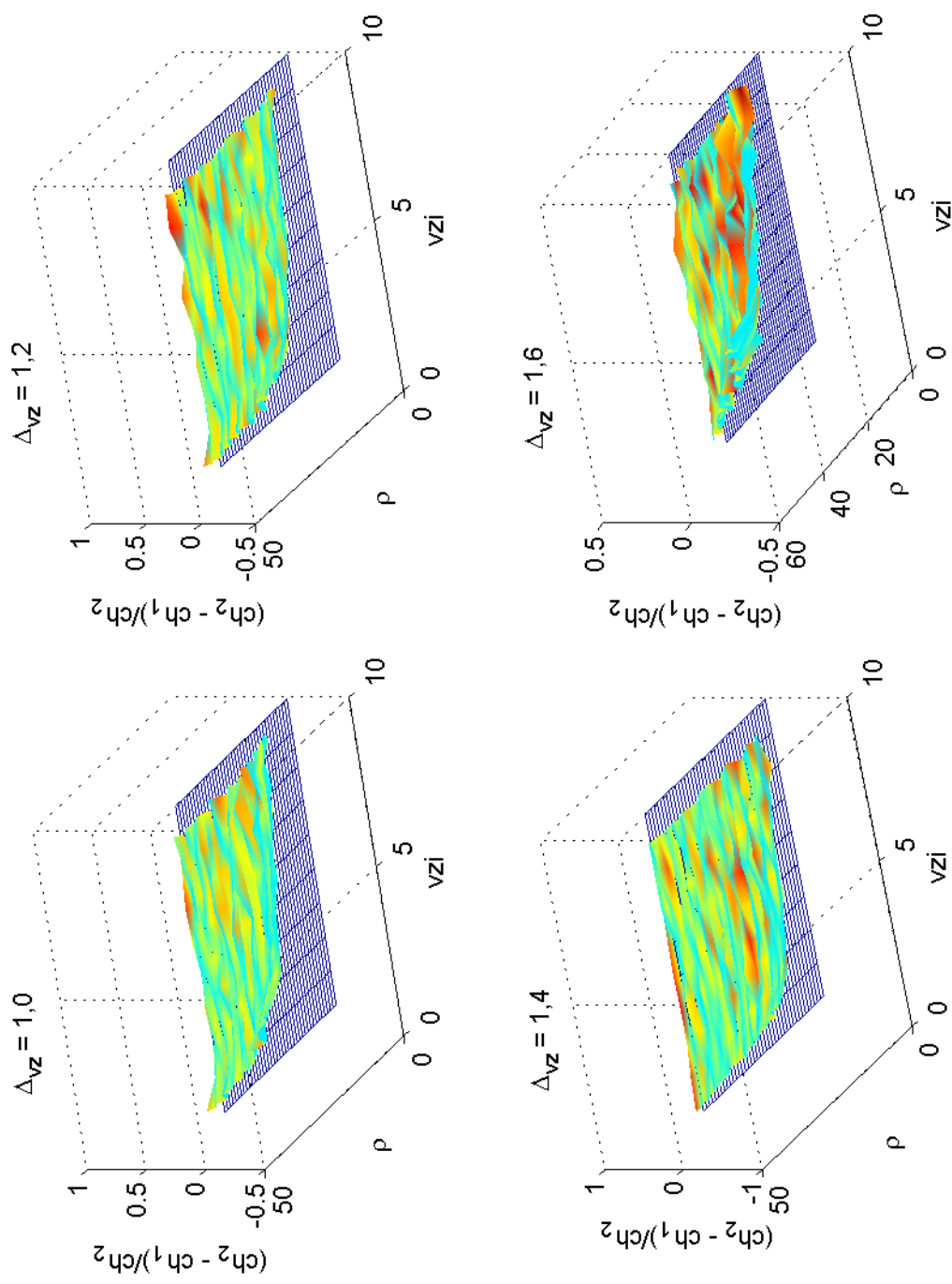
Jak si můžeme povšimnout z obrázků 8 a 9, metoda s využitím apriorní informace dává obecně lepší výsledky pro menší počet vzorků na převzorkovací interval a nižší hodnoty šumu. Lepší výsledky pro nízký počet vzorků, které jsou zejména patrné pro případ jednoho vzorku na převzorkovací interval jsou očekávané, neboť metoda bez apriorní informace má z principu velmi malou šanci odhadnout přímku na základě jednoho bodu. Naopak v případě, kdy v intervalu máme k dispozici velký počet vzorků, můžeme očekávat, že informace obsažená v těchto vzorcích bude mít větší váhu než apriorní informace. Obě metody pak budou dávat odhady se srovnatelnou přesností. Pro vysoké hodnoty šumu převažuje ve vzorcích signálu informace obsažená v šumu nad informací obsaženou v původním nezašuměném signálu. Obě metody se v takovém případě rozhodují převážně na základě hodnoty šumu, která s původním signálem nesouvisí, proto můžeme očekávat stejnou chybu obou metod.

Podívejme se nyní na shrnující srovnání chyby metody pravděpodobnostního převzorkování a metody bez apriorní informace. Toto srovnání zahrnuje chyby metod pro každý počítaný případ šumu ($\rho \in \{0, 1, \dots, 40\}$), všechny délky vzorkovacího intervalu ($\Delta_{vz} \in \{\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \dots, 2\}$) a počty vzorků na převzorkovací interval ($vzi \in \{1, \dots, 10\}$). V tomto srovnání tedy uvažujeme celkem 4100 hodnot chyb odhadu. Na obrázku 10 je histogram, na jehož vodorovné ose je vynesena rozdíl chyb obou metod. Toto srovnání se pro histogram jeví jako vhodnější. Srovnání použité pro obrázky má vhodné vlastnosti pro zobrazení (lze na něm dobře pozorovat některé vlastnosti obou srovnávaných metod), ale není symetrické kolem nuly vůči srovnávaným metodám (tj. při záměně metod nedostaneme stejný výsledek s opačným znaménkem). Na svislé ose jsou vyneseny relativní četnosti daných případů. Jak lze snadno vyčíst, pouze pro přibližně 10% případů byla metoda s apriorní informací horší. Podíváme-li se na vodorovnou osu tohoto histogramu, vidíme, že maximální zlepšení metodou s apriorní informací je pouze 0,2 % střední hodnoty signálu. Tento jev je však způsoben velkou střední hodnotou signálu ve srovnání s nepřesnostmi odhadu obou metod, nikoli zanedbatelným zlepšením vůči metodě bez apriorní informace, které může dosahovat až 50%, viz obrázek 8.

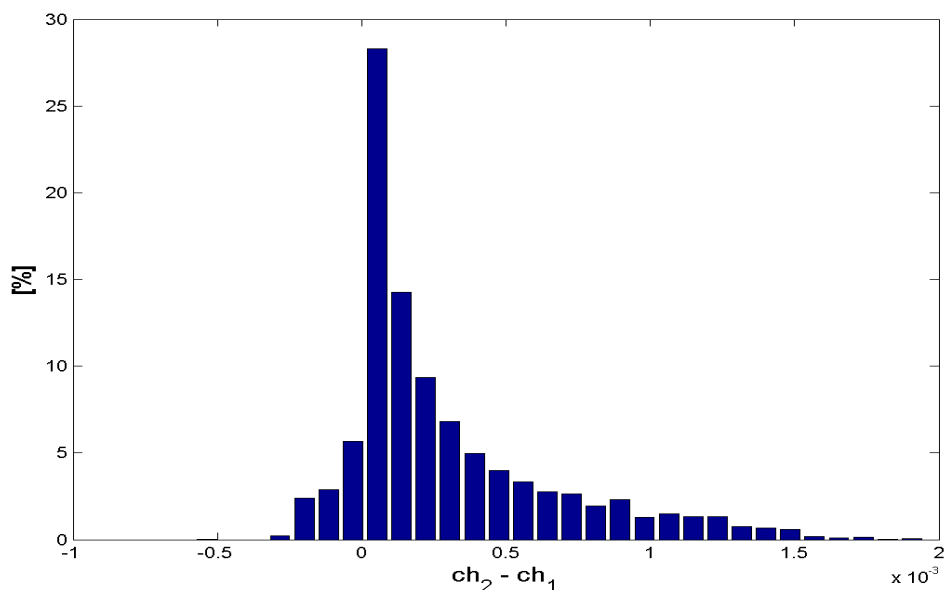
Nakonec si ještě můžeme povšimnout série histogramů na obrázku 11. Na nich můžeme vidět, že délka vzorkovacího intervalu nemá v případě signálu ve tvaru přímky podstatný vliv na rozdíl v přesnosti obou srovnávaných metod. Pro tento histogram byl rozdíl chyb metod vztážen na součet chyb metod, neboť při zobrazení pouhých rozdílů by histogram nebyl dobře čitelný.



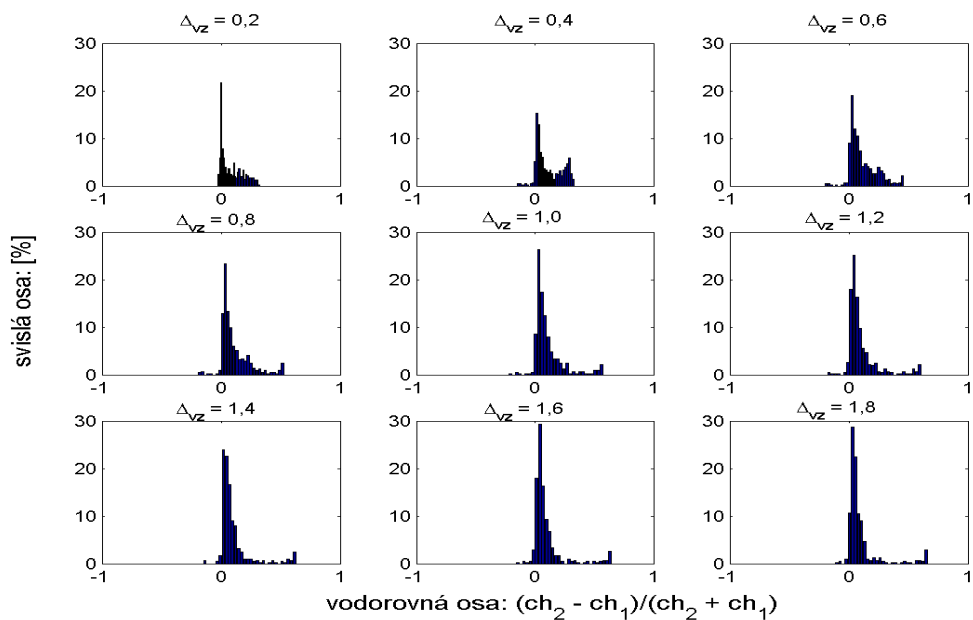
Obrázek 8: Srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací



Obrázek 9: Srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace pro různé délky vzorkovacího intervalu Δ_{vz} ; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací



Obrázek 10: Histogram srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace za všech 4100 různých případů počítaných podmínek; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací



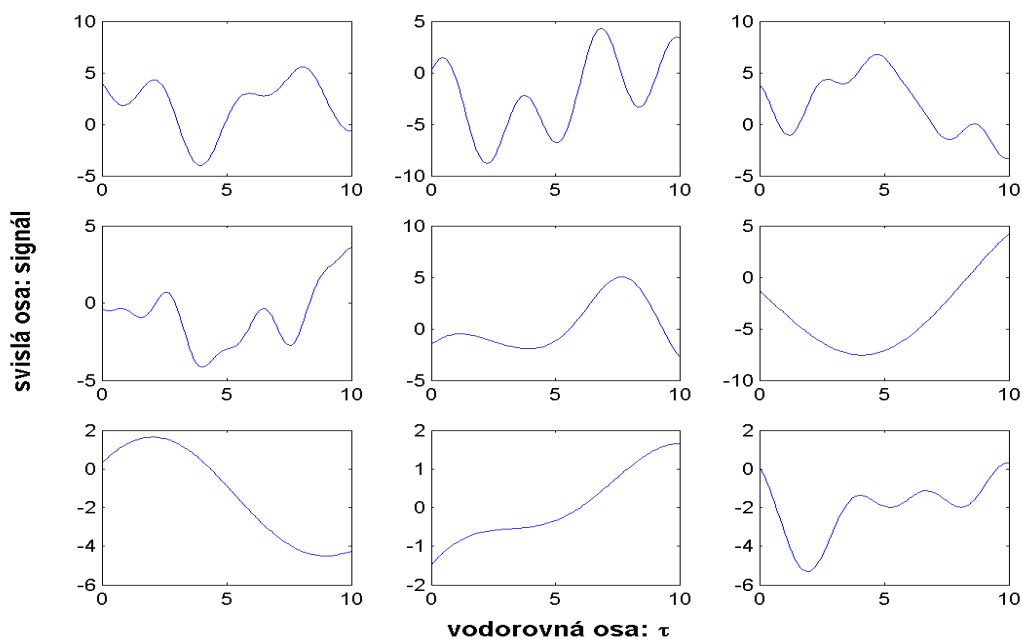
Obrázek 11: Histogramy srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace, vývoj pro různé délky vzorkovacího intervalu Δ_{vz} ; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací

4.2 Převzorkování náhodně generované funkce

Pro účely hlubšího a důkladnějšího testování metody pravděpodobnostního převzorkování ji můžeme testovat na náhodně generovaných funkcích ve tvaru

$$y(\tau) = \sum_{i=1}^{15} \alpha_i \sin(\beta_i \tau + \gamma_i), \quad \tau \in \langle 0, 10 \rangle, \quad (63)$$

kde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ jsou náhodně generovaná čísla s normálním rozdělením $N(0,1)$. Délka intervalu, na kterém jsme funkci testovali a počet sčítaných funkcí sinus byl zvolen podle následujícího požadavku. Chceme, aby výsledná funkce na zvoleném intervalu a při dané délce převzorkovacího intervalu neobsahovala příliš rychlé a velké změny funkčních hodnot, aby však zároveň popisovala z hlediska převzorkování zajímavý tvar signálu. Příklady průběhu některých náhodně vygenerovaných testovacích funkcí jsou na obrázku 12.



Obrázek 12: Ukázka průběhu některých testovaných signálů

Pro případ náhodně vygenerovaných funkcí testujeme převzorkování nepravidelně navzorkovaného signálu. Nejprve tedy vygenerujeme koeficienty $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ pro signál ve tvaru (63). Dále zvolíme 5 různých délek převzorkovacího intervalu

$$\Delta_p \in \left\{ \frac{1}{10}, \dots, \frac{5}{10} \right\}.$$

Ke každé délce převzorkovacího intervalu počítáme chybu metody pro 36 různých úrovní šumu

$$\sigma^2 \in \left\{ \left(\frac{11}{10} \right)^{2\rho} \right\}, \quad \rho \in \{0, 1, \dots, 35\}.$$

Pro každou hodnotu šumu a každou délku převzorkovacího intervalu počítáme chybu metody pro různý počet vzorků na převzorkovací interval. Počet vzorků na převzorkovací interval vzi pro danou vygenerovanou funkci, šum a délku převzorkovacího intervalu nebude narozdíl od případu testování přímky konstantní. Pro každý převzorkovací interval je generován jako náhodné číslo v rozmezí

$$lvzi \leq vzi \leq 2 \cdot lvzi, \quad lvzi \in \{1, 2, \dots, 11\}.$$

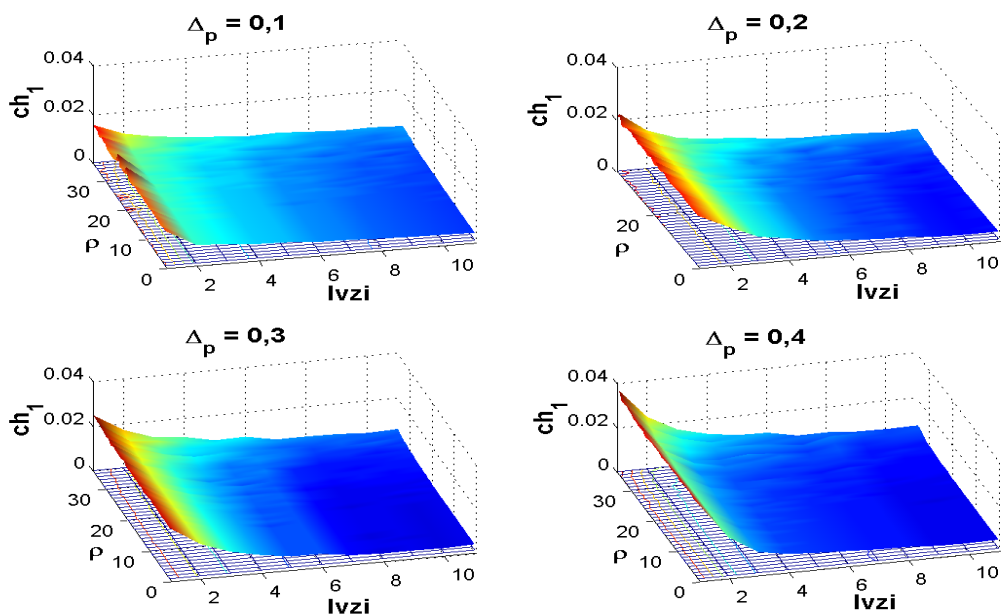
Chybu metody pro různé případy šumu, délky převzorkovacího intervalu a počtu vzorků na převzorkovací interval počítáme pro 19 náhodně vygenerovaných funkcí. Převzorkování takto navzorkovaného signálu je obtížnější než převzorkování pravidelně navzorkovaného signálu. Vzorky signálu mohou vytvořit shluk v okolí určitého časového okamžiku. Naopak v okamžiku převzorkování, v jehož blízkosti je přítomnost vzorku signálu velmi žádoucí, se nemusí vzorky vyskytovat. Z tohoto hlediska se jako vhodná volba nepravidelného rozložení vzorků daného signálu na časové ose jeví rovnoměrné rozložení.

Poznámka 24.

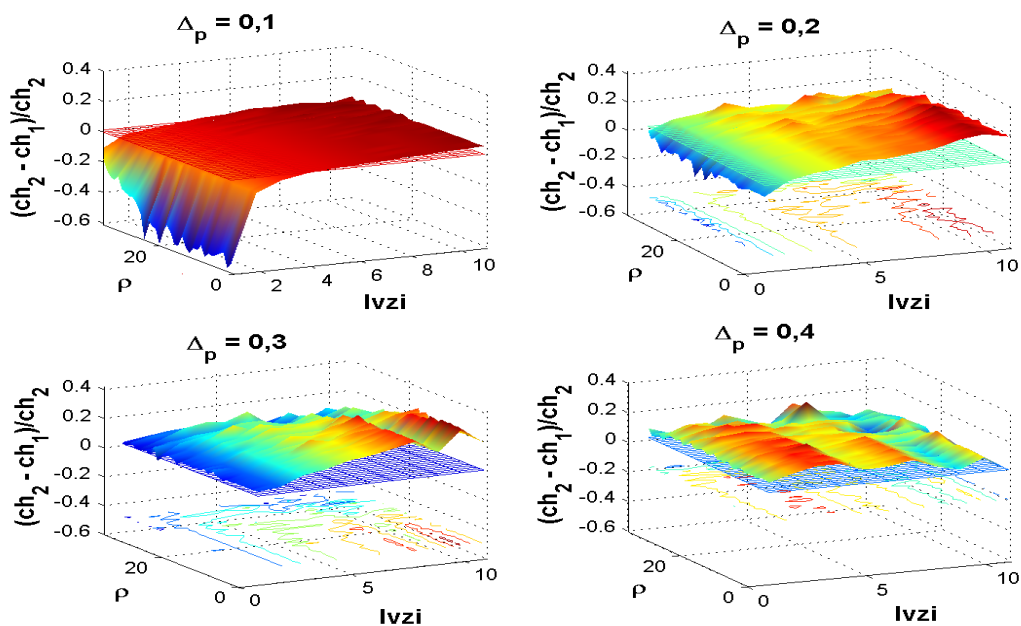
Pro rozložení vzorků v každém převzorkovacím intervalu bychom mohli zvolit také jiné rozdělení než rovnoměrné. Rovnoměrné rozložení se jeví jako objektivní, neboť narozdíl od jiných rozdělení neupřednostňuje žádné časové okamžiky a neměly by tedy vznikat shluky vzorků. Limitním případem takového upřednostnění je pravidelně navzorkovaný signál, který jsme použili dříve při testování převzorkování přímky.

Proveďme nyní diskusi získaných výsledků. Grafy na obrázku 13 znázorňují chybu metody s apriorní informací pro vybraného zástupce z 19 náhodně vygenerovaných testovacích funkcí. Průběh této funkce je na obrázku 15. Obrázek 15 zároveň zachycuje výsledek převzorkování pro zvolené hodnoty rozptylu šumu, délky převzorkovacího intervalu a počtu vzorků na převzorkovací interval. Jak lze snadno vyčíst z obrázku 13, chyba metody se podle očekávání zvětšuje spolu s rostoucím šumem a zároveň rychle klesá s rostoucím počtem vzorků na převzorkovací interval. Zároveň můžeme pozorovat, že zatímco chyba metody počítaná při malém počtu vzorků na převzorkovací interval rychle roste spolu s délkou převzorkovacího intervalu, odhady pro čtyři a více vzorků na převzorkovací interval zůstávají poměrně přesné.

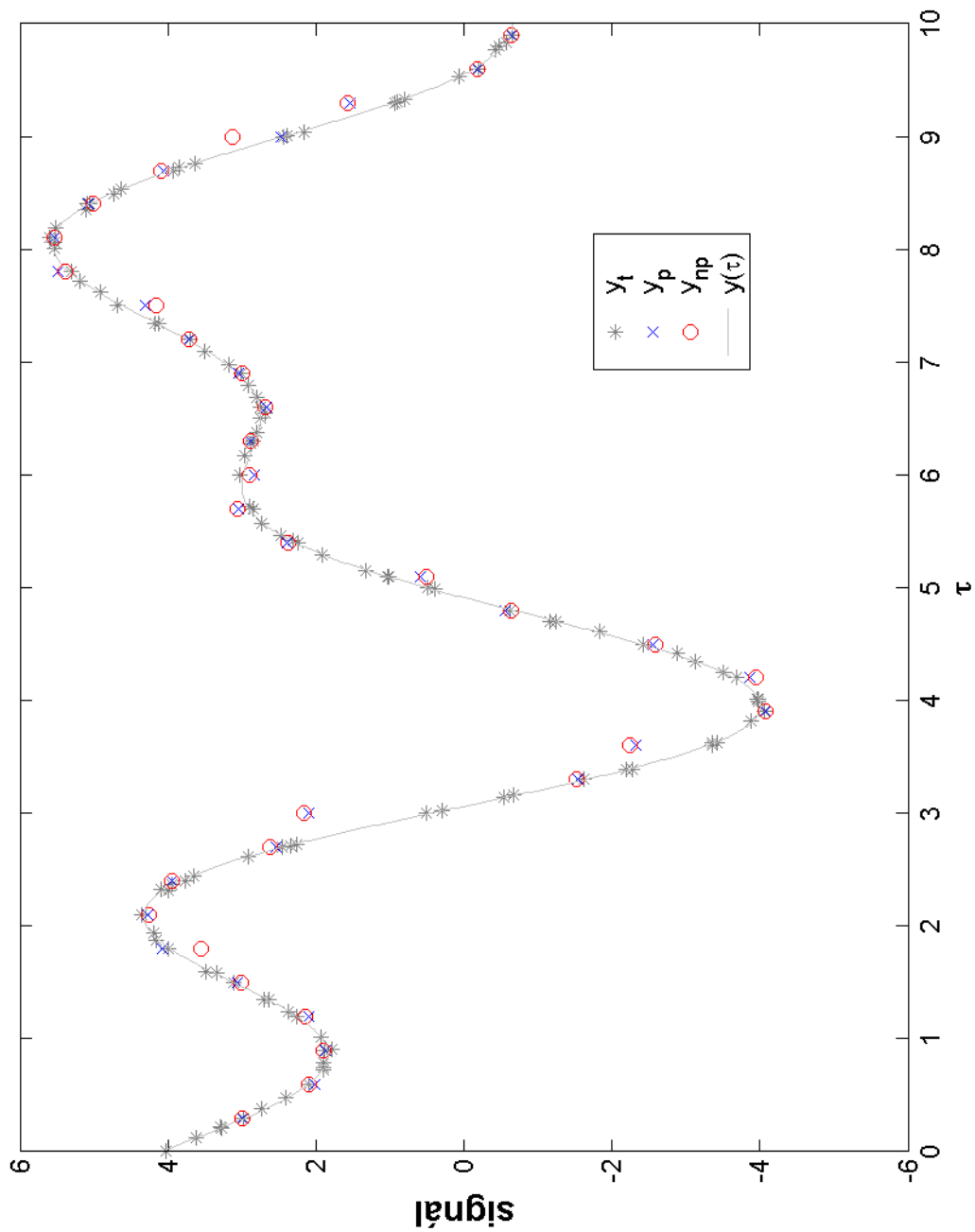
Podívejme se na srovnání metody pravděpodobnostního převzorkování a metody bez apriorní informace. Grafy na obrázku 14 zobrazují srovnání chyb obou metod pro různé délky převzorkovacího intervalu. Můžeme si zde povšimnout na první pohled zarážející skutečnosti. Pro malou délku převzorkovacího intervalu a při malém počtu vzorků na převzorkovací interval je metoda s apriorní informací výrazně horší. Tento výsledek se zdá být v rozporu s výsledky naměřenými při testování přímky. Je možné následující zdůvodnění.



Obrázek 13: Velikost chyby odhadu metody s apriorní informací pro různé délky převzorkovacího intervalu Δ_p



Obrázek 14: Srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace pro různé délky převzorkovacího intervalu Δ_p ; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací



Obrázek 15: Příklad převzorkování pro hodnoty $\Delta_p = \frac{3}{10}$, $\rho = 15$, $lvzi = 2$; y_t značí vzorky signálu použité pro odhad, $y(\tau)$ původní spojitý signál, y_p odhad metodou s apriorní informací, y_{np} odhad metodou bez apriorní informace

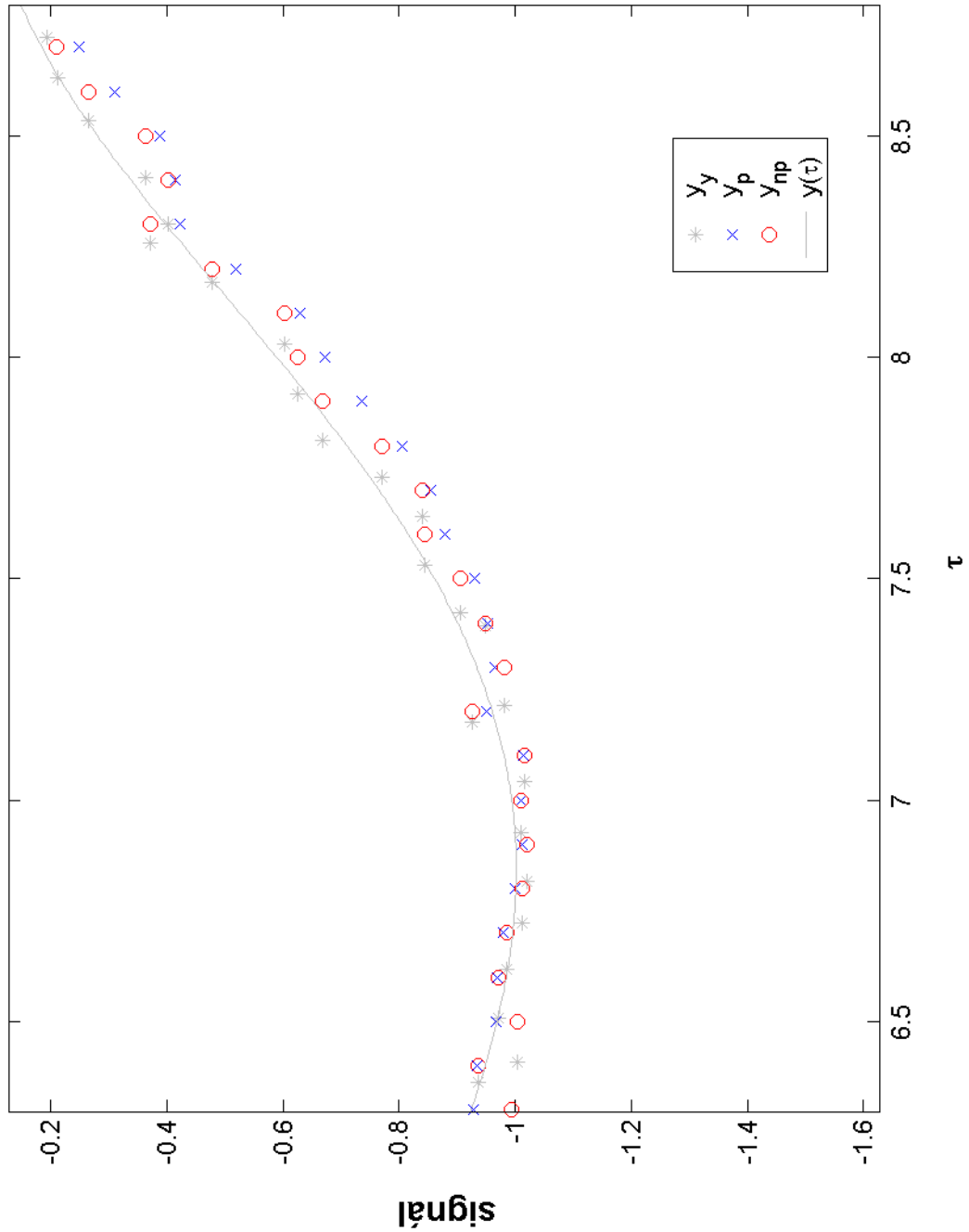
Jak bylo zmíněno v diskusi k obrázku 7, metoda bez apriorní informace v případě jednoho vzorku na převzorkovací interval dává hodnotu odhadu přibližně rovnou poslednímu známému vzorku signálu. Pokud je převzorkovací interval dostatečně krátký, bude poslední známý vzorek a odhadovaný vzorek na časové ose blízko u sebe. Protože předpokládáme signály s pomalým průběhem, budou blízké i hodnoty signálu. Tudíž odhad metodou bez apriorní informace bude poměrně přesný. Tato přesnost ovšem neplyne pouze z vlastností metody ale hlavně z vlastností konkrétního signálu. Proto ji nelze považovat za směrodatnou. Popsaná situace je vidět na obrázku 16.

Druhým důvodem je apriorní informace využívaná naší metodou. V případě přímký byly parametry námi zvoleného regresního modelu po celou dobu konstantní a jeden bod v převzorkovacím intervalu byl dostačující pro postupné zlepšení odhadu. V případě obecného signálu se ovšem parametry systému v čase mění. Je proto nutno dodat více informace v podobě více vzorků, aby se parametry mohli přizpůsobit aktuálním hodnotám signálu. Situace, kdy apriorní informace způsobí zhoršení přesnosti odhadu je znázorněna na obrázku 16. Metoda s apriorní informací se na tomto obrázku díky převažující apriorní informaci „zpožďuje za průběhem signálu“. Pokud se podíváme na srovnání obou metod pro případ více vzorků na převzorkovací interval (obrázek 14), zjistíme, že rozdíl chyb obou metod má tendenci klesat s vyšším počtem vzorků. To je obdobné jako situace pozorovaná při testování přímký.

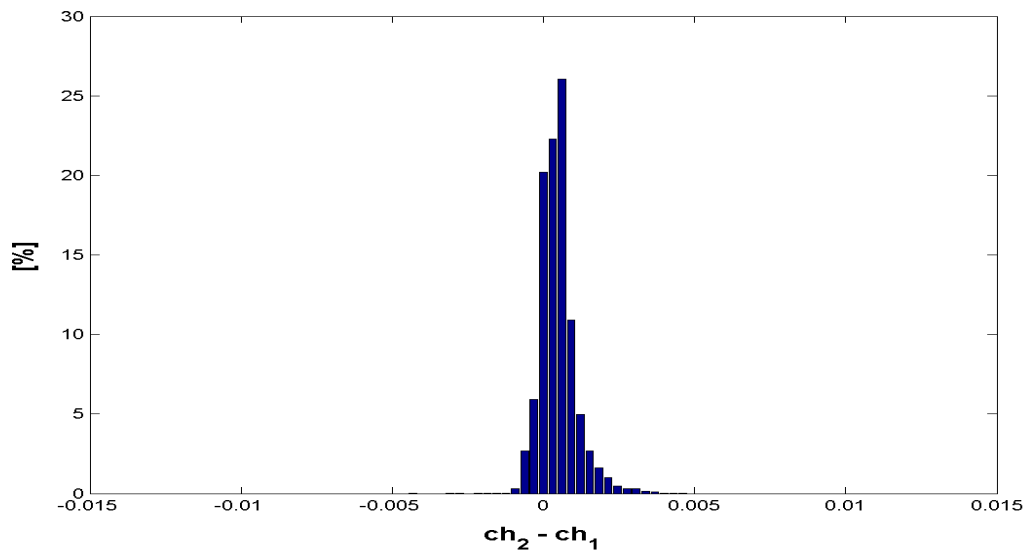
Zobrazíme ještě srovnání pravděpodobnostního převzorkování a metody bez apriorní informace na histogramu. Na obrázku 18 je znázorněn histogram spočítaný na základě hodnot chyb metod pro 19 různých náhodně vygenerovaných funkcí, 36 úrovní šumu v signálu, 11 délek převzorkovacích intervalů a 4 různých počtů vzorků na interval. Na vodorovné ose je vynesena rozdíl chyb obou metod. Na svislé ose jsou vyneseny relativní četnosti daných případů. V tomto histogramu nebyly uvažovány chyby metody pro hodnotu $lvzi = 1$, neboť jak bylo diskutováno dříve v textu, není za této podmínky použití metody s apriorní informací vhodné. Pro srovnání je na obrázku 17 histogram, kde byly zahrnuty také výsledky pro $lvzi = 1$. Na základě obou těchto histogramů můžeme konstatovat, že metoda s apriorní informací přináší určité zlepšení ve srovnání s metodou bez apriorní informace. Navíc pokud ji použijeme za vhodných podmínek ($lvzi > 1$), je toto zlepšení ještě výraznější (lze dobře vidět srovnáním histogramů 18 a 17). Z histogramu 18 lze zároveň vyčíst, že zlepšení může dosahovat až 0,5% střední hodnoty signálu v absolutní hodnotě.

Na obrázku 19 je detailní zobrazení histogramu z obrázku 17. Můžeme z něho vyčíst, že přibližně v 70% případů se zlepšení metodou s apriorní informací pohybuje v rozmezí 0 až 0,1% střední hodnoty signálu v absolutní hodnotě. Nakonec je na obrázku 20 zobrazen histogram znázorňující zlepšení chyby metody s apriorní informací vůči metodě bez apriorní informace. Vidíme na něm, že přibližně pro 40% případů nastane zlepšení do 10%, pro 25% případů nastane zlepšení od 10% do 20% a pro 5% případů zlepšení 20% až 30% z chyby metody bez apriorní informace. Každá chyba metody při daných podmínkách (ρ , $lvzi$, Δ_p) byla počítána na základě minimálně 101 odhadů hodnoty signálu. Proto histogramy 17, 18, 19 a 20 zobrazují informaci získanou na základě téměř 4

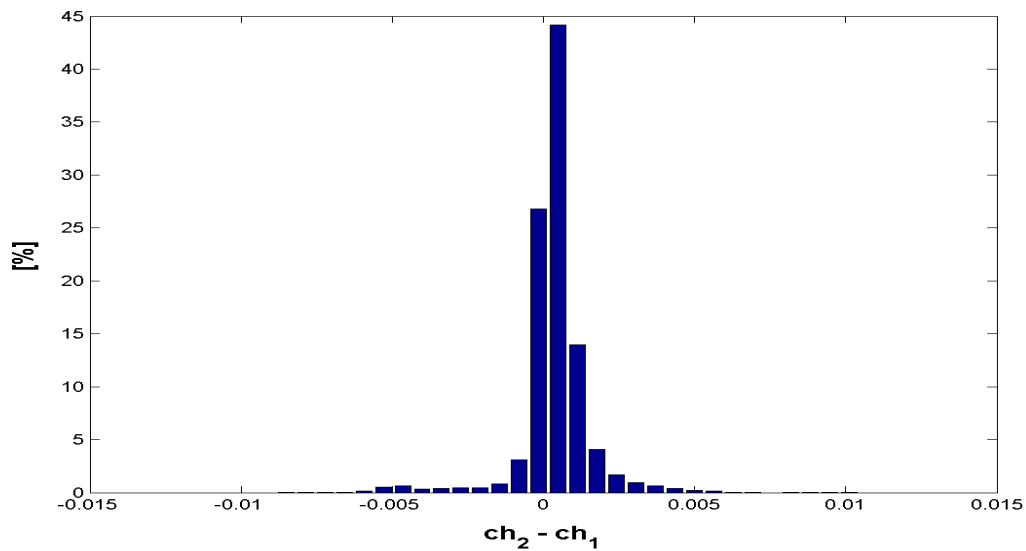
milionů odhadů hodnoty signálu pro každou metodu. Takovýto počet můžeme považovat za dostatečný pro formulaci tvrzení o zlepšení přesnosti převzorkování při použití metody s apriorní informací.



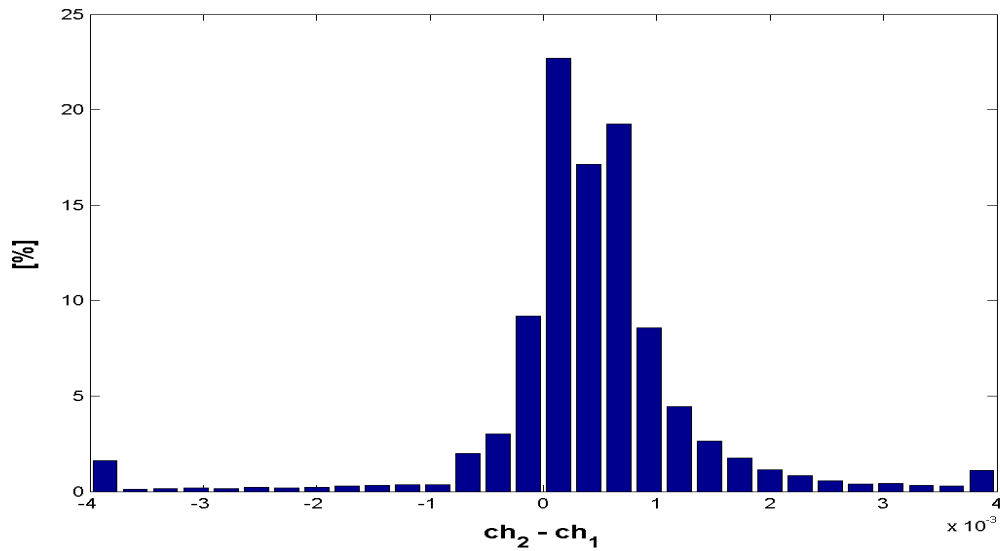
Obrázek 16: Příklad převzorkování pro hodnoty $\Delta_p = \frac{1}{10}$, $\rho = 20$, $vzi = 1$; y_t značí vzorky signálu použité pro odhad, $y(\tau)$ původní spojitý signál, y_p odhad metodou s apriorní informací, y_{np} odhad metodou bez apriorní informace



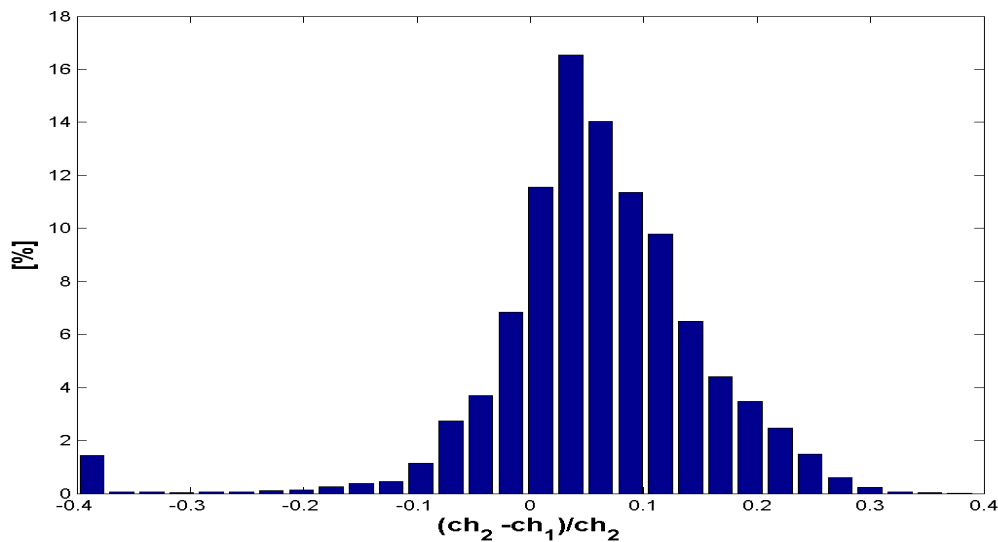
Obrázek 17: Histogram srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace, převzorkování náhodně generovaného signálu, nejsou zahrnuty případy $lvzi = 1$; (průměr = 0,0005; medián = 0,0004; minimum = -0,0045; maximum = 0,0048); hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací



Obrázek 18: Histogram srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace, převzorkování náhodně generovaného signálu; (průměr = 0,0004; medián = 0,0004; minimum = -0,0088; maximum = 0,0104); hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací



Obrázek 19: Histogram srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace, převzorkování náhodně generovaného signálu, detailní zobrazení, nezobrazené hodnoty jsou zahrnuty do krajních sloupců histogramu; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací



Obrázek 20: Histogram srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace v poměru k chybě metody bez apriorní informace, převzorkování náhodně generovaného signálu, detailní zobrazení, nezobrazené hodnoty jsou zahrnuty do krajních sloupců histogramu; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací

4.3 Převzorkování skutečného signálu

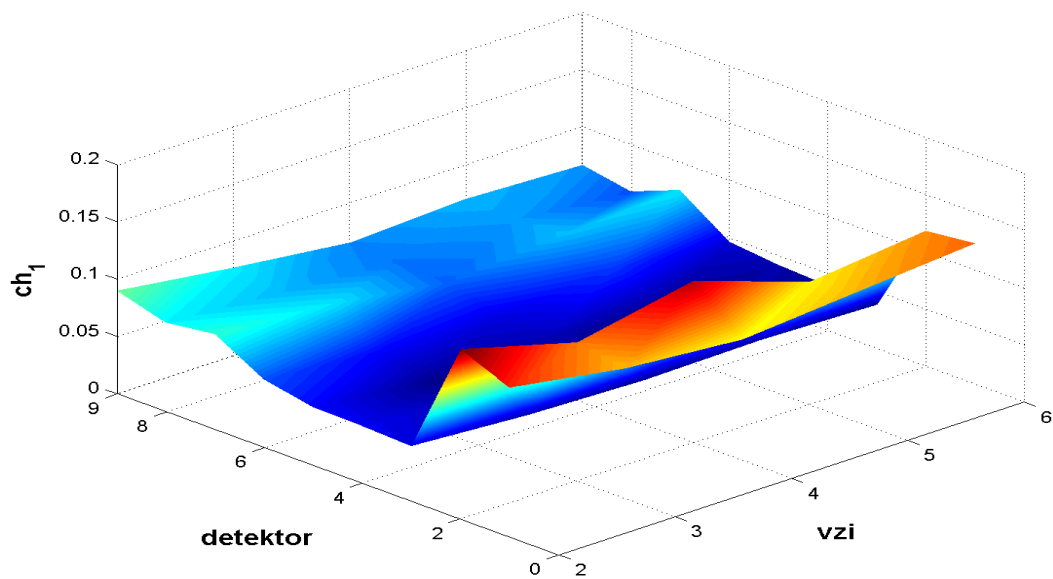
Pro testování na skutečných datech použijeme data z dopravních detektorů instalovaných ve vozovce v blízkosti křižovatek. Tato data slouží k zjišťování aktuální dopravní situace v místě detektoru a jsou využívána v modelech pro řízení dopravy v reálném čase. Jsou ale ve formě nepravidelně navzorkovaného signálu, který se nedá využít ve zmíněných modelech pro řízení dopravy. Proto je nutné signál z dopravních detektorů za účelem řízení převzorkovat v reálném čase. Toto převzorkování je úlohou, pro jejíž řešení byla metoda pravděpodobnostního převzorkování navržena. K dispozici máme záznam signálu z několika detektorů v průběhu pracovního týdne 11. 10. - 15. 10. 2004.

Nejprve se zmíníme stručně o charakteru signálu. Dopravní detektory každých 90 sekund posílají informaci o obsazenosti detektoru. Obsazenost je číslo, udávající dobu v procentech ze základního časového intervalu, kdy se v blízkosti detektoru nacházel automobil. Základní interval trvá 90 sekund. Pro účely řízení dopravy je nutné znát hodnoty signálu v okamžicích s delším časovým intervalem. Tento interval obvykle není možno nastavit jako násobek základního intervalu. Pro účely srovnání metod však musíme odhadovat hodnotu signálu v některém z okamžiků, kdy známe hodnotu signálu. Proto zvolíme délku převzorkovacího intervalu 6 minut (čtyřnásobek základního intervalu). Každý čtvrtý vzorek signálu z detektoru pro účely odhadu vypustíme a použijeme ke srovnání s odhadnutou hodnotou. Při převzorkování skutečného signálu se tedy bude jednat o převzorkování pravidelně navzorkovaného signálu.

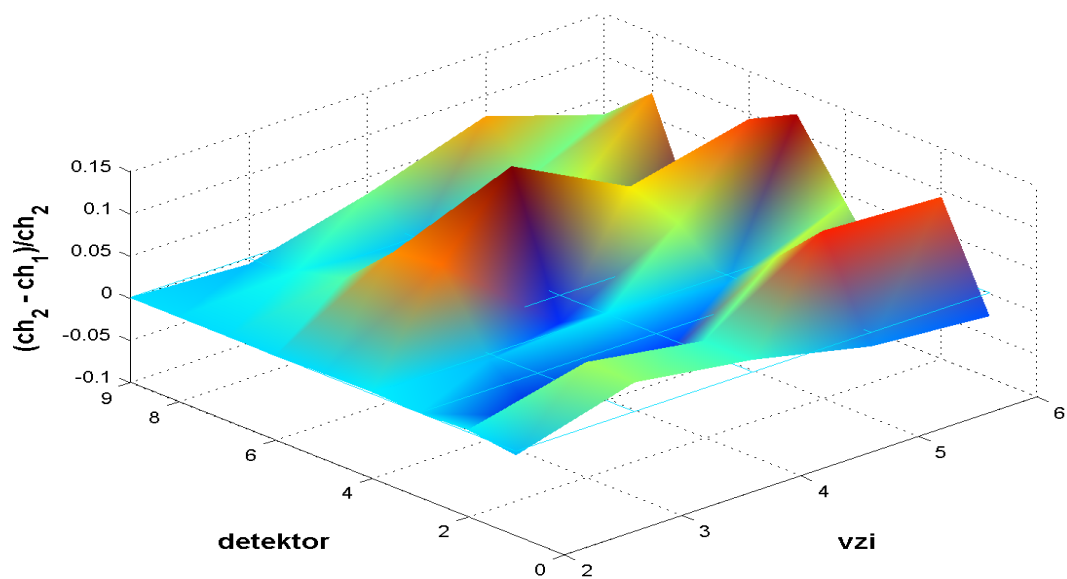
Podívejme se na tabulku 1. Zobrazuje chyby metod převzorkování signálu z vybraného detektoru pro jednotlivé dny a pro celý týden. Číselné hodnoty udávají velikost chyby jednotlivých metod v procentech (tedy vynásobené koeficientem 100). Vidíme, že chyby metod jsou vyšší než při převzorkování uměle vygenerovaného signálu. Z této tabulky můžeme usuzovat, že metoda s apriorní informací přináší při převzorkování skutečného signálu alespoň v některých případech jisté zlepšení vůči metodě bez apriorní informace. Při tomto tvrzení ale musíme být velmi opatrní. Z obrázku 23 ukazujícího charakter signálu z dopravních detektorů je vidět, že obsahuje velmi rychlé, až skokové přechody. Při převzorkování signálu s touto vlastností je odhad hodnoty signálu zatížen další chybou [3], která může významně zkreslit získané výsledky převzorkování. Poslední řádek tabulky ukazuje, že lineární extrapolace (zástupce klasického převzorkování) je podstatně horší ve srovnání se dvěma zbývajících metodami.

Tabulka 1: Chyby metody s apriorní informací, bez apriorní informace a lineární extrapolace pro převzorkování signálu z dopravních detektorů; hodnoty chyby metod jsou v [%]

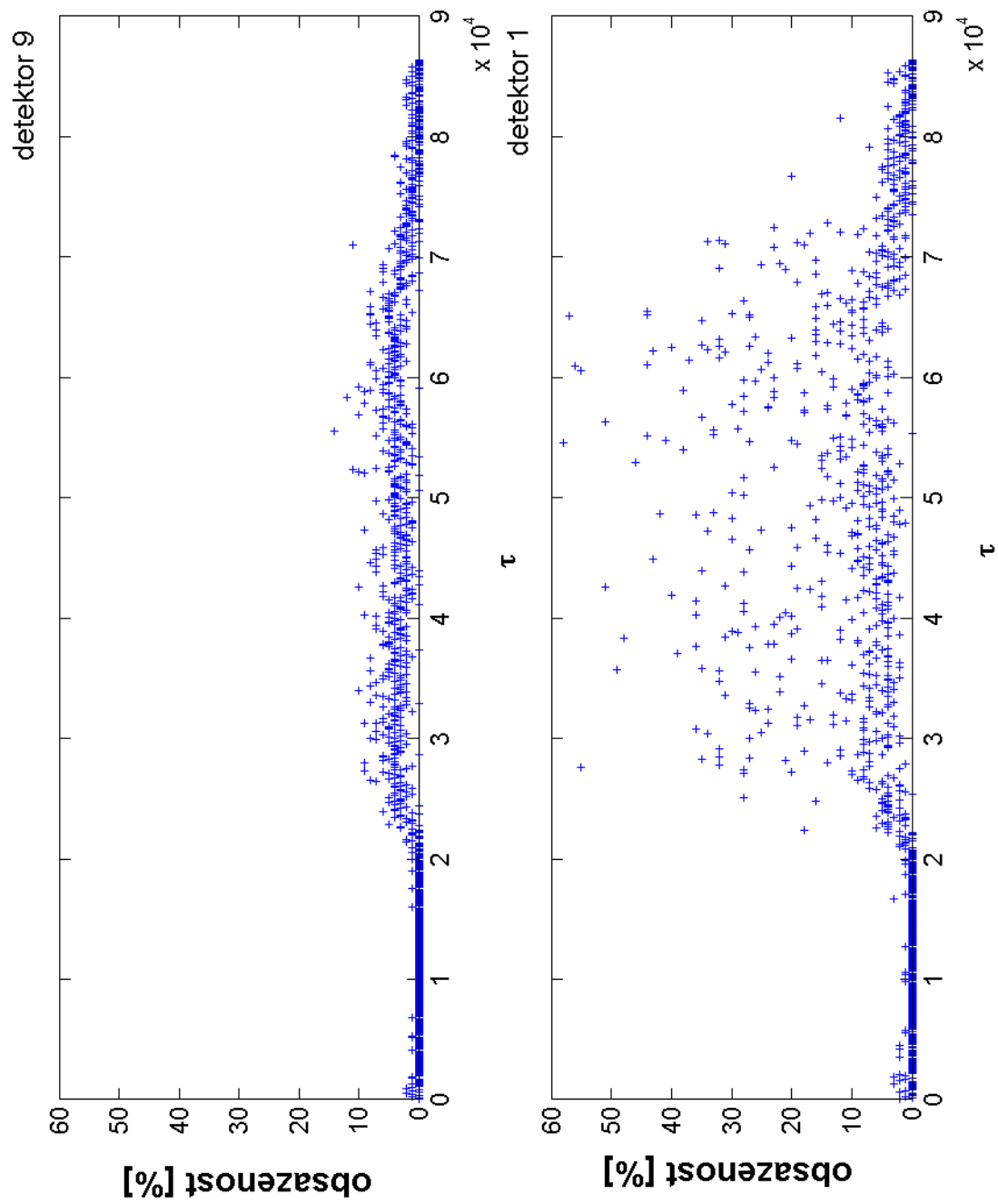
metoda	pondělí	úterý	středa	čtvrtek	pátek	týden
s apriorní informací	7.6771	11.1865	11.8354	8.3287	7.8784	5.3346
bez apriorní informace	7.6211	11.3176	12.5581	8.1217	7.7655	5.4450
lineární extrapolace	10.1889	13.1749	15.7301	11.0123	9.3148	6.5477



Obrázek 21: Chyba metody s apriorní informací pro různé detektory a počty vzorků na převzorkovací interval



Obrázek 22: Srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace při převzorkování signálu z dopravních detektorů pro různé detektory a počty vzorků na převzorkovací interval; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací

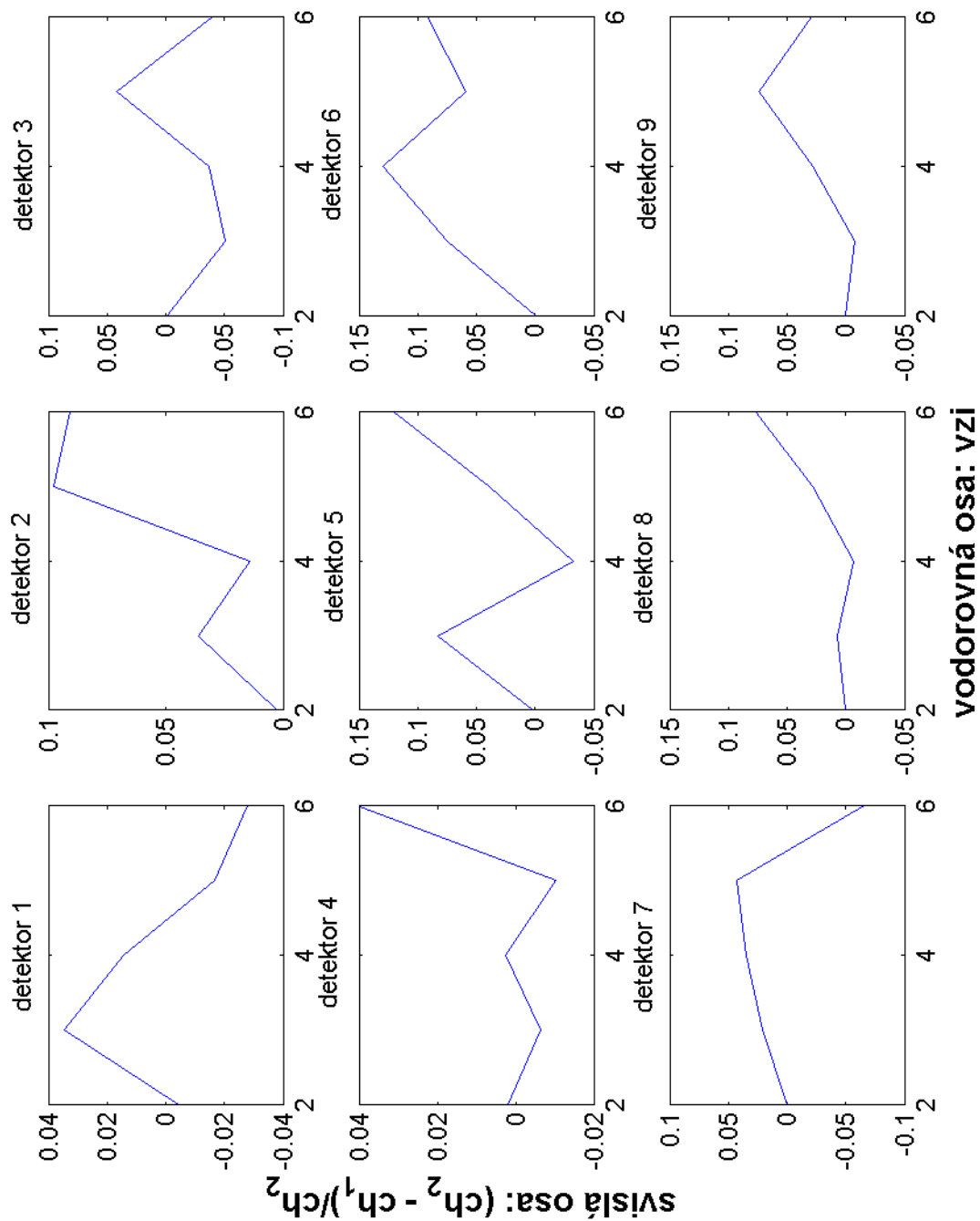


Obrázek 23: Různé průběhy signálů způsobené různým dopravním vytížením pozemní komunikace v místě detektoru

Spočítejme podrobněji chybu metody s apriorní informací pro signály z různých detektorů pro různou délku převzorkovacího intervalu (tj. různý počet vzorků na převzorkovací interval). Graf na obrázku 21 zobrazuje výsledky pro devět detektorů a dva až šest vzorků na převzorkovací interval. Obrázek 22 pak představuje srovnání metody pravděpodobnostního převzorkování a metody bez apriorní informace. Jak vidíme, chyba metody silně závisí na konkrétním detektoru. To je dáno především rozdílným charakterem signálu z jednotlivých detektorů. Jak je vidět z obrázku 23, intenzita dopravního provozu je na detektoru číslo 9 pravděpodobně mnohem menší než na detektoru číslo 1, signál obsahuje méně prudkých přechodů a tím pádem můžeme očekávat menší chyby odhadu. V případě převzorkování skutečného signálu se neopakuje jev pozorovaný při převzorkování náhodně generovaných funkcí, kdy chyba metody měla tendenci klesat s vyšším počtem vzorků na převzorkovací interval.

Obdobně jako při testování náhodně generovaných signálů, metoda pravděpodobnostního převzorkování pro jeden vzorek na převzorkovací interval nedává dobré výsledky. V případě skutečného signálu z dopravních detektorů je však chyba metody pro jeden vzorek na převzorkovací interval řádově 1000 krát vyšší než při větším počtu vzorků. Pro případ jednoho vzorku na převzorkovací interval proto nemá smysl použít metodu pravděpodobnostního převzorkování.

Na základě srovnání chyb metody pravděpodobnostního převzorkování a metody bez apriorní informace pro různé detektory a počty vzorků na převzorkovací interval se můžeme pokusit odhadnout optimální počet vzorků pro metodu pravděpodobnostního převzorkování. Hledáme tedy takový počet vzorků na převzorkovací interval, při kterém je zlepšení metodou s apriorní informací co největší. Jak však ukazuje obrázek 24, optimální počet vzorků pokud existuje, bude pravděpodobně záviset na konkrétním detektoru. Tento obrázek zároveň ukazuje, že pro každý detektor existuje počet vzorků na převzorkovací interval, při kterém přináší metoda s apriorní informací zlepšení vůči metodě bez apriorní informace.



Obrázek 24: Srovnání přesnosti odhadů metody s apriorní informací a bez apriorní informace; hodnoty nad nulou jsou ve prospěch metody s apriorní informací

4.4 Program

Poznámka 25. *Program je přiložen na samostatném CD vloženém v práci.*

Za účelem testování metody pravděpodobnostního převzorkování byl vytvořen program v podobě skupiny funkcí a skriptů v prostředí Matlab. U důležitých funkcí je přiložen detailní komentář přímo v kódu dané funkce. Tyto funkce provádějí samotné testování a dále usnadňují práci při interpretaci výsledků. První hlavní funkcí programu je „kombin3“. Tato funkce počítá samotné převzorkování signálu. Využívá přitom některé další skripty naprogramované jinými autory. Tyto skripty, jež nejsou součástí práce, jsou uloženy na CD v podadresáři „m“. Druhou hlavní funkcí je „ko6x“. Tato funkce využívá funkci kombin3 a je zodpovědná za výpočet chyby metod převzorkování pro různé testované případy (délka převzorkovacího intervalu, počet vzorků na převzorkovací interval, rozptyl šumu). Pro pohodlí uživatele je přiložen úplný test v podobě skriptu „cykluj2“ pro přednastavené hodnoty náhodně generovaného signálu. Kromě uvedených funkcí je přiloženo několik pomocných skriptů, které usnadňují práci při zobrazování a interpretaci výsledků. V následujících poznámkách je stručně popsán postup práce s některými funkcemi. Podrobnější vysvětlení je přímo v kódu funkcí. Tento popis předpokládá základní znalosti s prostředím Matlab.

Poznámka 26. *(Skript cykluj2)*

Tento skript nemá žádné parametry. Spouští se příkazem „cykluj2“. Upozornění: skript může běžet po dobu 15 - 50 hodin, v závislosti na rychlosti počítače. Tento skript spočítá chyby metod pro 20 náhodně generovaných signálů pro pevně nastavené podmínky. Výsledek se uchová v proměnné „v2“.

Poznámka 27. *(Struktura výsledku v2)* Výsledek v2 je vektor. Jeho jednotlivé složky obsahují chyby jednotlivých metod pro danou testovanou funkci. Například „v{1} · a“ je chyba metody s apriorní informací pro první náhodně vygenerovanou funkci. Obdobně „v{1} · b“ a „v{1} · d“ je chyba metody bez apriorní informace a lineární extrapolace pro první náhodně vygenerovanou funkci.

Poznámka 28. *(Funkce zobraz4)*

Pro zobrazení výsledků slouží funkce „zobraz4(ch1,ch2)“. Pole ch1, ch2 obsahují chyby dvou srovnávaných metod. Pro srovnání metody s apriorní informací a bez apriorní informace můžeme zadat například „zobraz4(v{1} · a, v{1} · b)“.

5 Závěr

Tato práce se zabývala problematikou převzorkování signálů. Zejména pak možnostmi využití metod převzorkování signálů pro převzorkování v reálném čase za účelem řízení. Nejprve byly představeny některé klasické přístupy k převzorkování signálů a metody jež tento přístup představují. Dále byla popsána metoda pravděpodobnostního převzorkování navržená speciálně pro převzorkování signálu v reálném čase za účelem řízení. Další část práce se pak věnovala testováním některých metod převzorkování za podmínek navozených uměle vygenerovaným signálem a také na reálných datech.

Hlavním výsledkem této práce bylo navržení, realizace a vyhodnocení série testů sloužících ke srovnání metody pravděpodobnostního převzorkování s klasickými metodami. Ze získaných výsledků byly odvozeny některé meze použitelnosti pro metodu pravděpodobnostního převzorkování a byly formulovány závěry týkající se pozorovaného chování této metody. Z těchto závěrů plyne, že metoda pravděpodobnostního převzorkování přináší zlepšení ve srovnání s klasickými metodami převzorkování při použití v reálném čase za účelem řízení.

Z testování metody pravděpodobnostního převzorkování vyplynuly další doposud neřešené úlohy, které se jeví jako vhodný předmět dalšího zkoumání. Jedná se například o úpravy metody pravděpodobnostního převzorkování (použití nelineárního modelu, odhadování vhodné struktury modelu, jiný způsob práce s převzorkovacími intervaly a jiné) nebo o testování vlivu převzorkování signálu na kvalitu řízení.

Literatura

- [1] Anděl J.: Matematická statistika, SNTL, Praha, 1978
- [2] Peterka V.: „Bayesian approach to system identification“, in Trends and progress in system identification (P. Eykhoff ed.), pp. 239–304, Pergamon Press, Oxford, 1981
- [3] Wolberg G.: Digital image warping, IEEE Computer Society Press, California, 1990
- [4] T.M. Lehmann, C. Gönner, K. Spitzer: Survey: Interpolation Methods in Medical Image Processing, IEEE Transactions on Medical Imaging 18, 1049-1075, 1999
- [5] V. Hoffner: Úvod do teorie signálů, SNTL, Praha, 1979
- [6] V. Čížek: Diskrétní Fourierova transformace a její použití, SNTL, Praha, 1981
- [7] M. Kárný, J. Böhm, T. V. Guy, L. Jirsa, I. Nagy, P. Nedoma, L. Tesař: Optimized Bayesian Dynamic Advising: Theory and Algorithms, Springer, London, 2005
- [8] M. Kárný, J. Andrášek, A. Bordini, T. V. Guy, J. Kracík, F. Ruggeri: How to exploit external model of data for parameter estimation, Int. J. Adapt. Control Signal Process., 20:41-50, 2006
- [9] I. Nagy, L. Pavelková, E. Suzdaleva, J. Homolová, M. Kárný: Bayesian Decision Making: Theory and Samples, Technical Report, UTIA AV ČR, Praha, 2005
- [10] M. Kárný, J. Andrášek, A. Bordini, T. V. Guy, J. Kracík, F. Ruggeri: Probabilistic Equalization of Irregular Sampling, Technical Report, UTIA AV ČR, Praha, 2005, draft
- [11] P. Nedoma, J. Böhm, T. V. Guy, L. Jirsa, M. Kárný, I. Nagy, L. Tesař, J. Andrášek: Mixtools User's Guide, Technical Report 2060, UTIA AV ČR, Praha, 2002